

2023 届石家庄市高中质量检测（二）

数学答案

一、单选题

1-4 CBAA 5-8 BDCD

二、多选题

9. BC 10. BD 11. ABC 12. ABC

三、填空题

13. 0.1 14. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

15. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 16. $\frac{11\sqrt{5}}{25}$

四、解答题

17. 解: (I) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题知 $q \neq 1$,

则 $a_1(q^4 - 1) = 30$, $\frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = 30$,2分

解得 $q = 2, a_1 = 2$ 4分

$\therefore a_n = 2^n$ 5分

(II) 由 (I) 知 $b_n = \log_2 a_{2n+1} = 2n+1$ 6分

$\therefore \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$ 8分

$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right)$

$= \frac{n}{3(2n+3)}$ 10分

18. (I) 根据余弦定理得, $2\sqrt{2}a^2 \cos B + b^2 = a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2$,2分

即 $2\sqrt{2}a^2 \cos B = 2a^2$, $\therefore \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4分

$\because B \in (0, \pi) \quad \therefore B = \frac{\pi}{4}$5分

(II)方法一:

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, $A+B+C = \pi, B = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore A+C = \frac{3\pi}{4}, \therefore \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{3\pi}{4} - A < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \therefore \frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2}$7分

$\because a = 4$, 根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, $\therefore c = \frac{4 \sin(\frac{3\pi}{4} - A)}{\sin A}$ 8分

由面积公式可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \sqrt{2}c = 4\sqrt{2} \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - A)}{\sin A}$,

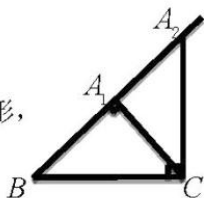
即 $S_{\triangle ABC} = \frac{4}{\tan A} + 4$,10分

$\because \frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2}, \therefore \tan A > 1, \therefore S_{\triangle ABC} \in (4, 8)$,

故 $\triangle ABC$ 面积的取值范围为 $(4, 8)$12分

方法二:

由 $B = \frac{\pi}{4}, a = 4$, 画出如图所示三角形,



$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, \therefore 点 A 落在线段 A_1A_2 (端点 A_1, A_2 除外) 上.7分

当 $CA_1 \perp A_1B$ 时, $S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ 9分

当 $CA_2 \perp BC$ 时, $S_{\triangle A_2BC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ 11分

$\therefore S \in (4, 8)$ 12分

19. (I) 事件 $B =$ “甲乙两队比赛 4 局甲队最终获胜”,

事件 $A_j =$ “甲队第 j 局获胜”, 其中 $j = 1, 2, 3, 4, A_j$ 相互独立.

又甲队明星队员 M 前四局不出场, 故: $P(A_j) = \frac{1}{2}, j=1, 2, 3, 4, \dots$ 2 分

$$B = \overline{A_1}A_2A_3A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + A_1A_2\overline{A_3}A_4,$$

所以 $P(B) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16} \dots$ 4 分

(II) 设 C 为甲 3 局获得最终胜利, D 为前 3 局甲队明星队员 M 上场比赛,

则由全概率公式可知: $P(C) = P(C|D) \cdot P(D) + P(C|\overline{D}) \cdot P(\overline{D}) \dots$ 5 分

因为每名队员上场顺序随机, 故 $P(D) = \frac{C_4^2 \cdot A_3^3}{A_5^3} = \frac{3}{5},$

$$P(\overline{D}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, \dots$$
 7 分

$$P(C|D) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}, \quad P(C|\overline{D}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \dots$$
 9 分

所以 $P(C) = \frac{3}{16} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{13}{80} \dots$ 10 分

(III) $P(D|C) = \frac{P(CD)}{P(C)} = \frac{P(C|D) \cdot P(D)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{16} \times \frac{3}{5}}{\frac{13}{80}} = \frac{9}{13} \dots$ 12 分

20. 解: (I) 平行四边形 ABCD 中, $AD \perp BD$, 可得 $BD \perp BC$

$$\because AD = 2BD = 4$$

$$\therefore BC = 4, DC = 2\sqrt{5}$$

$$\text{又} \because PC = 6$$

$$\therefore PD^2 + DC^2 = PC^2, \therefore PD \perp DC \dots$$
 2 分

分

又 $PD \perp BD, BD \cap DC = D$

$\therefore PD \perp$ 平面 BDC \dots 3 分

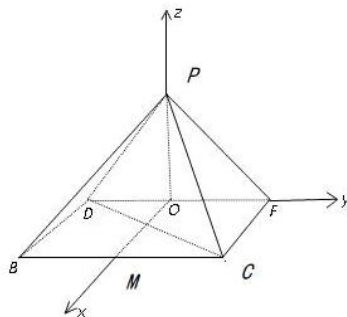
$\therefore PD \perp BC \dots$ 4 分

(II) 方法一:

如图, 过点 D 做 $DF \parallel BC$, 且 $DF=BC$, 连接 PF, CF,

由题意可知, $BD \perp PD, BD \perp DF, PD \cap DF=D$

$\therefore BD \perp$ 平面 PDF, $\therefore BD \perp PF$



所以 $CF \perp PF$

$$\therefore PF = \sqrt{PC^2 - CF^2} = 4$$

又 $BD \subset$ 平面 $BCFD$, \therefore 平面 $BCFD \perp$ 平面 PDF 5分

取 DF 中点 O , 连接 PO , 由 $PF=PD$, 得 $PO \perp DF$

$$\therefore PO \perp \text{平面} BCFD, \text{且} PO = 2\sqrt{3} \text{6分}$$

过 O 点作 OM 垂直于 DF , 建立如图所示的空间直角坐标系, 由题可得 $P(0, 0, 2\sqrt{3})$,

$$B(2, -2, 0), C(2, 2, 0), D(0, -2, 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{PC} = (2, 2, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{DC} = (2, 4, 0), \overrightarrow{BC} = (0, 4, 0), \text{8分}$$

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 平面 PDC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x', y', z')$

$$\therefore \begin{cases} x + y - \sqrt{3}z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{取} \mathbf{m} = (\sqrt{3}, 0, 1)$$

$$\text{同理} \begin{cases} x' + y' - \sqrt{3}z' = 0 \\ x' + 2y' = 0 \end{cases} \text{取} \mathbf{n} = (2\sqrt{3}, \sqrt{3}, \dots) \text{10分}$$

$$\therefore \cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{7}{8}$$

所以平面 PDC 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{7}{8}$ 12分

方法二: 由 $BD \perp BC$, 建立如图所示的空间直角坐标系

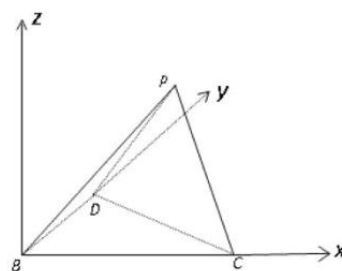
$$\therefore AD = 2BD = 4$$

$$\therefore B(0, 0, 0), C(4, 0, 0), D(0, 2, 0)$$

设 $P(x, y, z)$ (其中 $z > 0$)5分

$$\therefore PB = 2\sqrt{5}, PC = 2\sqrt{5}, PD = 4$$

$$\therefore \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 20 \text{6分} \\ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$



$$\text{解得} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\therefore P(2, 2, 2\sqrt{3})$$

$$\therefore \overrightarrow{CP} = (-2, 2, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{CD} = (-4, 2, 0), \overrightarrow{BP} = (2, 2, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (4, 0, 0)$$

.....8分

设平面 PDC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x', y', z')$

$$\therefore \begin{cases} -x + y + \sqrt{3}z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \text{取} \mathbf{m} = \left(1, 2, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

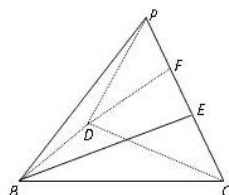
$$\text{同理} \begin{cases} x' + y' + \sqrt{3}z' = 0 \\ x' = 0 \end{cases} \text{取} \mathbf{n} = (0, -\sqrt{3}, 1) \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\therefore \cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = -\frac{7}{8}$$

所以平面 PDC 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{7}{8}$ 12分

方法三:

过点 B 作 $BE \perp PC$ 交 PC 于 E , 过点 D 作 $DF \perp PC$ 交 PC 于 F 5分



$\triangle PDC$ 中, 由 $PD = 4, PC = DC = 2\sqrt{5}$

$$\text{可得} \cos\angle DPF = \frac{\sqrt{5}}{5} \therefore DF = \frac{8\sqrt{5}}{5}, PF = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

同理, 在 $\triangle PBC$ 中, $BE = \frac{8\sqrt{5}}{5}, CE = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 可得 $EF = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 7分

而 $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BD}$ 9分

$$\therefore (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD})^2 = \overrightarrow{BD}^2$$

$$\therefore |\overrightarrow{BE}|^2 + |\overrightarrow{EF}|^2 + |\overrightarrow{FD}|^2 + 2\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FD} + 2\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FD} = |\overrightarrow{BD}|^2 \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\text{即} \frac{64}{5} + \frac{4}{5} + \frac{64}{5} + 2 \times \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \cos\langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FD} \rangle = 4$$

解得 $\cos\langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{BE}| |\overrightarrow{FD}|} = -\frac{7}{8}$

所以平面 PDC 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{7}{8}$ 12 分

21.解: (I) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

当 $a=1$ 时, $f'(x) = 2e^{2x+1} - 2e^{x+1} + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^x - 1)(4e^{x+1} + 1)$,2 分

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$.

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$\frac{1}{2} - e$	单调递增

.....4 分

因此, 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 有极小值, 极小值为 $f(0) = \frac{1}{2} - e$5 分

(2) $f'(x) = 2ae^{2x+1} - 2e^{x+1} + \frac{a}{2}e^x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(ae^x - 1)(4e^{x+1} + 1)$,6 分

(i) 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减,

$f(x)$ 至多有一个零点.7 分

(ii) 若 $a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -\ln a$.

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调递增.

所以当 $x = -\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(-\ln a) = \frac{1}{2} - \frac{e}{a} + \frac{1}{2} \ln a$9 分

① 当 $a = e$ 时, 由于 $f(-\ln a) = 0$, 故 $f(x)$ 只有一个零点;

② 当 $a \in (e, +\infty)$ 时, 由于 $\frac{1}{2} - \frac{e}{a} + \frac{1}{2} \ln a > 0$, 即 $f(-\ln a) > 0$, 故 $f(x)$ 没有零点;

.....10 分

③当 $a \in (0, e)$ 时, $\frac{1}{2} - \frac{e}{a} + \frac{1}{2} \ln a < 0$, 即 $f(-\ln a) < 0$.

当 $0 < a < e$ 时, $\ln a < 1, -\ln a > -1 > -2$, 且 $f(-2) = \frac{a}{e^3} + \frac{a}{2e^2} + 1 - \frac{2}{e} > 0$, 故 $f(x)$ 在

$(-\infty, -\ln a)$ 有一个零点.

$$\therefore f\left(\ln \frac{2e}{a}\right) = \frac{4e^3 - 4e^2}{a} + e - \frac{1}{2} \ln \frac{2e}{a}, \quad \ln \frac{2e}{a} > -\ln a$$

先证明当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq x - 1$, 设 $m(x) = \ln x - (x - 1)$, 则 $m'(x) = \frac{1-x}{x}$,

\therefore 当 $0 < x < 1$ 时, $m'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $m'(x) < 0$,

$\therefore m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

\therefore 当 $x = 1$ 时 $m(x)$ 取到最大值 $m(1) = 0$.

所以当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq x - 1$.

$$\therefore f\left(\ln \frac{2e}{a}\right) = \frac{4e^3 - 4e^2}{a} + e - \frac{1}{2} \ln \frac{2e}{a} \geq \frac{4e^3 - 4e^2}{a} + e - \frac{1}{2} \left(\frac{2e}{a} - 1\right) = \frac{4e^3 - 4e^2 - e}{a} + e + \frac{1}{2} > 0$$

因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 有一个零点.

综上, a 的取值范围为 $(0, e)$12 分

22. 解: (I) 设 $A(x_0, y_0), B(x'_0, y'_0)$

由题意可知, P 点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, 则直线 l_2 的斜率为 $k_{l_2} = -\frac{1}{2}$, 所以直线 l_1 的斜率为

$$k_{l_1} = 2,$$

故直线 l_1 的方程为: $y = 2(x - 2)$;1 分

$$\text{联立直线 } l_1 \text{ 和曲线 } \Gamma \text{ 的方程: } \begin{cases} y = 2(x - 2) \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 16x + 19 = 0, \text{ 此方程的两根即为}$$

$$x_0, x'_0,$$

由韦达定理可得: $x_0 + x'_0 = 16, x_0 x'_0 = 19$ ①3 分

所以: $|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_0+x'_0)^2 - 4x_0x'_0} = 30$ 4分

(II) 设 $A(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(-x_1, -y_1)$, 则 $k_1 = \frac{y_0}{x_0-2}$, 因为直线 l_2 垂直直线 l_1 , 故 l_2

的直线方程为 $y = -\frac{1}{k_1}(x-2)$, 代入 $x = \frac{1}{2}$, 可得点 P 的坐标 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2k_1}\right)$,

所以: $k_2 = \frac{\frac{3}{2k_1} - y_0}{\frac{1}{2} - x_0} = \frac{\frac{3(x_0-2)}{2y_0} - y_0}{\frac{1}{2} - x_0} = \frac{3x_0 - 6 - 2y_0^2}{(1-2x_0)y_0}$,5分

因为点 $A(x_0, y_0)$ 在双曲线上, 故 x_0, y_0 满足双曲线方程, 即 $x_0^2 - \frac{y_0^2}{3} = 1 \Rightarrow y_0^2 = 3x_0^2 - 3$ 。

所以 $k_2 = \frac{3x_0 - 6 - 2y_0^2}{(1-2x_0)y_0} = \frac{3x_0}{y_0}$,6分

所以 $k_1 + k_2 = \frac{y_0}{x_0-2} + \frac{3x_0}{y_0} = \frac{y_0^2 + 3x_0(x_0-2)}{(x_0-2)y_0} = \frac{6x_0^2 - 6x_0 - 3}{(x_0-2)y_0}$;

$k_1 k_2 = \frac{y_0}{x_0-2} \cdot \frac{3x_0}{y_0} = \frac{3x_0}{x_0-2}$ 7分

又直线 OP 的斜率 $k_{OP} = \frac{y_P}{x_P} = \frac{3}{k_1}$, 联立直线 OP 与双曲线 C 的方程:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{k_1}x \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (k_1^2 - 3)x^2 - k_1^2 = 0,$$

此方程的两根即为 $x_1, -x_1$, 所以 $x_1^2 = \frac{k_1^2}{k_1^2 - 3} = \frac{y_0^2}{12x_0 - 15}$,8分

所以

$$\begin{aligned} k_3 + k_4 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{-y_1 - y_0}{-x_1 - x_0} = \frac{2x_1y_1 - 2x_0y_0}{x_1^2 - x_0^2} = \frac{\frac{6}{k_1}x_1^2 - 2x_0y_0}{x_1^2 - x_0^2} = \frac{\frac{6(x_0-2)y_0}{12x_0-15} - 2x_0y_0}{\frac{y_0^2}{12x_0-15} - x_0^2} \\ &= \frac{-12y_0(2x_0^2 - 3x_0 + 1)}{y_0^2 - (12x_0 - 15)x_0^2} = \frac{-12y_0(2x_0^2 - 3x_0 + 1)}{-3(4x_0^3 - 6x_0^2 + 1)} = \frac{4y_0(2x_0 - 1)(x_0 - 1)}{(2x_0 - 1)(2x_0^2 - 2x_0 - 1)} \end{aligned}$$

$$\text{即: } k_3 + k_4 = \frac{4y_0(x_0 - 1)}{2x_0^2 - 2x_0 - 1} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以: } (k_3 + k_4)(k_1 + k_2) = \frac{12(x_0 - 1)}{x_0 - 2} = 2k_1k_2 + 6 \text{ ,}$$

$$\text{即: } v = \frac{1}{2}uw - 3 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线