“顶尖计划”2023 届高中毕业班第一次考试

文科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|\ x=2n+3,n\in\mathbf{N}\},B=\left\{x|\ x^2-18x-40<0\right\}$，则 $A\cap B$ 中的元素个数为

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

2. 已知复数 $z=\dfrac{3i}{2+i^3}$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. 3

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

4 在区间 $(-2,2)$ 内任取一实数 x，则 $\log_{\frac{1}{2}}x>3$ 成立的概率为

A. $\dfrac{1}{32}$　　B. $\dfrac{1}{16}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

5. 我国古代经典数学名著《九章算术》中有一段表述：“今有圆堡壔（dǎo），周四丈八尺，高一丈一尺”，意思是有一个圆柱，底面周长为 4 丈 8 尺，高为 1 丈 1 尺. 则该圆柱的表面积约为（注：1 丈=10 尺，π 取 3）

A. 1088 平方尺　　B. 912 平方尺　　C. 720 平方尺　　D. 656 平方尺

6. 已知不等式组 $\begin{cases}x+y\le 4\\ ax-y>5\\ x+ay\ge 2\end{cases}$，表示的平面区域不包含点 $(3,1)$ 则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，且 $a_1=\dfrac{1}{2}$，则 $a_{2022}=$

A. -2　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 3

8. 已知函数 $f(x)=2\sin x+3\cos x$ 在 $x=\varphi$ 处取得最大值，则 $\cos\varphi=$

A. $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$　　C. $-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$　　D. $-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

9. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(4-x)=0$，且当 $x\in[-2,2)$ 时，$f(x)=x^2-4$，则 $f(2021)=$

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

10. 已知角α的顶点在坐标原点,始边与x轴的非负半轴重合,终边经过点$(m,-4)$,其中$m<0$, 若$\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$,则$\tan\left(\alpha+\frac{m\pi}{2}\right)=$

A. 2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$

11. 设抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点为F,点A、B在抛物线上,若$AF\perp x$轴,且$|BF|=2|AF|$,则$\angle AFB=$

A. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

12. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为2,直线$l$与$C$交于$P,Q$两点,$D$为线段$PQ$的中点,$O$为坐标原点.则$l$与$OD$的斜率的乘积为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共 20 分.

13. 小明从雪糕店购买了10种不同的雪糕,这些雪糕的价格(单位:元)如茎叶图所示,则小明购买的雪糕价格的中位数为_____.

0	1, 2, 3, 3, 4, 6, 8
1	0, 2, 5

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数:$f(x)=$_____.

① $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;②当$x\in(0,+\infty)$时,$f(x)$单调递减;③$f(x)$为偶函数.

15. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_3+a_4=-1, S_{11}=-11$, 则nS_n的最大值为_____.

16. 已知圆锥AO和BO的底面重合(O为底面圆圆心),点A与B不重合,且A,B和底面圆周都在同一个半径为2的球面上,设圆锥AO的体积为V_1,圆锥BO的体积为V_2,若V_1+V_2的最大值为V,则当$V_1+V_2=\frac{V}{4}$时,$|V_1-V_2|=$_____.(用数值作答)

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17-21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17.(12 分)

在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边为a,b,c,已知$b=2,c=4,2\sin A=3\sin 2C$.

(I)求a

(II)设A的平分线与BC交于点D,求AD的长.

18.(12 分)

某工厂共有甲、乙两个车间，为了比较两个车间的生产水平，分别从两个车间生产的同一种零件中各随机抽取了 100 件，它们的质量指标值 m 统计如下：

质量指标值 m	$[0,20)$	$[20,40)$	$[40,60)$	$[60,80)$	$[80,100]$
甲车间（件）	15	20	25	31	9
乙车间（件）	5	10	15	39	31

(I) 估计该工厂生产这种零件的质量指标值 m 的平均数；(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

(II) 根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表（表中数据单位：件），并判断是否有 99% 的把握认为甲、乙两个车间的生产水平有差异.

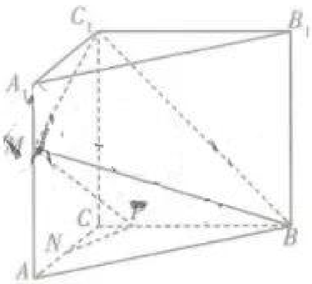
	$m<60$	$m\geq 60$
甲车间		
乙车间		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\ \ k)$	0.05	0.01	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. (12 分)

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AA_1=2AC=BC=4$. M 为棱 AA_1 上靠近 A_1 的三等分点，N 为棱 AC 的中点，点 P 在棱 BC 上，且直线 $PN//$ 平面 BMC_1.



(I) 求 PC 的长；

(II) 求点 A 到平面 MBP 的距离.

20. (12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-\ln x$.

(I)若 $a=1$，求 $f(x)$ 的极值.

(II)若方程 $f(x)=1$ 在区间 $[1,2]$ 上有解，求实数 a 的取值范围.

21. (12 分)

过椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上任意一点 P 作直线 $l:y=kx+p$

(I) 证明：$p^2\ \ 3+4k^2$；

(II) 若 $p\neq0$，O 为坐标原点，线段 OP 的中点为 M，过 M 作 l 的平行线 l'，l' 与 C 交于 A,B 两点，求 $\triangle ABP$ 面积的最大值.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在 22, 23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2m(\cos\varphi-\sin\varphi), \\ y=m(\cos\varphi+\sin\varphi) \end{cases}$ (φ 为参数, $m\neq 0$), 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-5=0$.

(I) 写出 l 的直角坐标方程;

(II) 若 l 与 C 只有一个公共点，求 m 的值.

23. [选修 4-5:不等式选讲] (10 分)

已知 a,b,c 均为正实数，且 $abc=1$.

(I) 求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}$ 的最小值;

(II) 证明: $bc+ac+ab \quad \dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{a+c}+\dfrac{2}{a+b}$.

文科数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	C	A	B	B	D	A	D	D	A	B

二、填空题

13.5　　14. $-\log_2|x|$（不唯一）　　15.54　　16. $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

三、解答题：

17.

解析（I）由 $2\sin A=3\sin 2C$ 得 $\sin A=3\sin C\cos C$，

再由正弦定理和余弦定理得 $a=3c\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

整理可得 $a^2-\dfrac{3c(b^2-c^2)}{2b-3c}=18$，

所以 $a=3\sqrt{2}$.

（II）由余弦定理可得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

因为 AD 是角 A 的平分线，$AB=2AC$，

所以 $BD=2CD$，所以 $CD=\sqrt{2}$.

在 $\triangle ACD$ 中，$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\times CD\cos C=4$，

所以 $AD=2$.

18. 解析（I）由所给数据，各组的频率分别为 0.1, 0.15, 0.2, 0.35, 0.2

所以该工厂生产这种零件的质量指标值 m 的平均数的估计值为

$10\times0.1+30\times0.15+50\times0.2+70\times0.35+90\times0.2=58$

(II) 2×2 列联表如下：

	$m<60$	$m\geq60$
甲车间	60	40
乙车间	30	70

所以 $K^2=\dfrac{200\times(60\times70-40\times30)^2}{100\times100\times90\times110}\approx18.182$

因为 18.182 大于 6.635，所以有 99%把握认为甲乙两个车间的生产水平有差异.

19.解析（I）在 CC_1 上取一点 Q，使得 $CP=CQ$，连接 PQ,NQ.

由已知得 $CC_1=CB$，所以 $PQ//BC_1$.

因为 $PQ \not\subset$ 平面 BMC_1，所以 $PQ // $ 平面 BMC_1.

又因为 $PN //$ 平面 $BMC_1, PN \cap PQ = P$

所以平面 $PQN //$ 平面 BMC_1.

根据面面平行的性质可知 $MC_1 // QN$.

在矩形 ACC_1A_1 中，可得 $\triangle CQN \backsim \triangle A_1MC_1$，

所以 $\dfrac{CQ}{CN} = \dfrac{A_1M}{A_1C_1} = \dfrac{2}{3}$，所以 $PQ = CQ = \dfrac{2}{3}CN = \dfrac{2}{3}$.

（II）连接 MC，作 $AH \perp MC$ 垂足为 H.

由条件知 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1，所以平面 $MBC \perp$ 平面 ACC_1A_1，

故求距离转化为求线段 AH 的长.

在 $Rt\triangle ACM$ 中，$MC = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \dfrac{10}{3}$，

所以 $AH = \dfrac{AC \times AM}{MC} = \dfrac{2 \times \frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \dfrac{8}{5}$，

故点 A 到平面 MBP 的距离为 $\dfrac{8}{5}$.

20. 解析 $f'(x) = ax - \dfrac{1}{x} = \dfrac{ax^2 - 1}{x}, x > 0$

(I)当 $a = 1$ 时，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$

当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) < 0$，当 $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = \dfrac{1}{2}$，无极大值

(II)①若 $a \geq 1$，当 $x \in [1,2]$ 时 $f'(x) \geq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增

要使方程 $f(x) = 1$ 在 $[1,2]$ 上有解，则 $\begin{cases} f(1) \quad 1, \\ f(2) \quad 1, \end{cases}$

即 $\begin{cases} \dfrac{a}{2} \leq 1 \\ 2a - \ln 2 \quad 1 \end{cases}$ 得 $\dfrac{1+\ln 2}{2} \quad a \quad 2$，因为 $\dfrac{1+\ln 2}{2} < 1$，所以 $1 \quad a \quad 2$.

②若 $a \leq \dfrac{1}{4}$，当 $x \in [1,2]$ 时 $f'(x) \leq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减

此时 $f(x)\ \ f(1)=\frac{a}{2}\ \ \frac{1}{8}$不符合条件.

③若 $\frac{1}{4}<a<1$，当 $1\ \ x<\sqrt{\frac{1}{a}}$ 时，$f'(x)<0$，当 $\sqrt{\frac{1}{a}}<x\ \ 2$ 时 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[1,\sqrt{\frac{1}{a}}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\sqrt{\frac{1}{a}},2\right]$ 上单调递增

此时 $f(1)=\frac{a}{2}<\frac{1}{2}, f\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)<f(1)<\frac{1}{2}$，要使方程 $f(x)=1$ 在 $[1,2]$ 上有解，则需 $f(2)=2a-\ln 2\ \ 1$

得 $a\ \ \frac{1+\ln 2}{2}$，所以 $\frac{1+\ln 2}{2}\ \ a<1$.

综上可知，a 的取值范围为 $\left[\frac{1+\ln 2}{2},2\right]$

21．解析解析（I）联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+p,\end{cases}$

消去 y 整理得 $(3+4k^2)x^2+8kpx+4p^2-12=0$，

因为点 P 在 C 上，所以 $\Delta=64k^2p^2-4(4p^2-12)(3+4k^2)\ \ 0$.

化简得 $p^2\ \ 3+4k^2$.

（II）设 $l':y=kx+m$，点 $P(x_0,y_0)$，则 $M\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$.

由已知得 $y_0=kx_0+p$，所以 $\frac{y_0}{2}=k\cdot\frac{x_0}{2}+\frac{p}{2}$，

即点 $M\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$ 满足方程 $y=kx+\frac{p}{2}$，所以 $m=\frac{p}{2}$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}, x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$.

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}}{3+4k^2}$.

所以 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{(4k^2+3-m^2)m^2}}{3+4k^2}=2\sqrt{3}\sqrt{\left(1-\frac{m^2}{3+4k^2}\right)\frac{m^2}{3+4k^2}}$

令 $\frac{m^2}{3+4k^2}=t$，因为 $m^2=\frac{p^2}{4}\quad\frac{3+4k^2}{4}$，所以 $t\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

所以 $S_{\triangle ABP}=2\sqrt{3}\sqrt{-t^2+t}\quad 2\sqrt{3}\sqrt{-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$

所以 $\triangle ABP$ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}$.

22. 解析（I）由 l 的极坐标方程可得 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta-5=0$，故其直角坐标方程为 $x+y-5=0$.

（II）由 C 的参数方程可得 $\left(\frac{x}{2m}\right)^2+\left(\frac{y}{m}\right)^2=2$，

即 C 的普通方程为 $x^2+4y^2-8m^2=0$.

联立方程 $\begin{cases}x+y-5=0\\x^2+4y^2-8m^2=0,\end{cases}$ 得 $5x^2-40x+100-8m^2=0$，因为 l 与 C 只有一个公共点，

所以 $\Delta=40^2-4\times5\times\left(100-8m^2\right)=160m^2-400=0$，

解得 $m=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

23. 解析（I）由基本不等式可知 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}\quad 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\times\frac{2}{b}\times\frac{4}{c}}=3\sqrt[3]{8}=6$，当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{4}{c}$，即

$a=\frac{1}{2},b=1,c=2$ 时等号成立，所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}$ 的最小值为 6 .

（II）因为 $abc=1$，所以 $bc+ac+ab=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\quad 2\sqrt{\frac{1}{ab}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}\quad\frac{2}{\frac{a+b}{2}}=\frac{4}{a+b}$.

同理可得 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\quad\frac{4}{b+c},\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\quad\frac{4}{a+c}$

所以 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\quad\frac{4}{b+c}+\frac{4}{a+c}+\frac{4}{a+b}$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\quad\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}+\frac{2}{a+b}$，

即 $bc+ac+ab\quad\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}+\frac{2}{a+b}$.