湖北省黄冈中学2023届高三5月第二次模拟考试

数学参考答案及评分标准

选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	A	C	D	B	D	CD	ABC	BC	ABD

填空题

13．-26　　14．$\frac{121}{3}$　　15．$\sqrt{3}$　　16．$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

解答题

17.【解析】(1) 因为 $f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})$，所以 $y=f(x)$ 图像的一条对称轴为 $x=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{7\pi}{12}$.　　……4分

（2）因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 单调，所以最小正周期 $T\geqslant 2\times(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{2\pi}{3}$，即 $\omega\leqslant 3$，又 ω 为正整数，所以 $\omega=1$，2，3，由（1）知，$f(x)$ 在 $x=\frac{7\pi}{12}$ 处取得最值，

所以 $\frac{7\pi}{12}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，即 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\omega+k\pi$，$k\in Z$，　　……6分

①当 $\omega=1$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$，由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，知 $\varphi=-\frac{\pi}{12}$，所以 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{12})$，

所以 $f(\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12})=\sin\frac{\pi}{12}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$，不符合题意；

②当 $\omega=2$ 时，$\varphi=-\frac{2\pi}{3}+k\pi$，$k\in Z$，由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，知 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

所以 $f(\frac{\pi}{6})=\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，符合题意；

③当 $\omega=3$ 时，$\varphi=-\frac{5\pi}{4}+k\pi$，$k\in Z$，由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，知 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sin(3x-\frac{\pi}{4})$，

所以 $f(\frac{\pi}{6})=\sin(3\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$，不符合题意.

综上所述，$\varphi=\frac{\pi}{3}$.　　……10分

18.【解析】(1) $\because (1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\dots(1+\frac{1}{a_n})=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$，$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$1+\frac{1}{a_1}=2$，解得 $a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，

$(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\dots(1+\frac{1}{a_{n-1}})=2^{\frac{(n-1)n}{2}}$，两式相除得 $\frac{1}{a_n}+1=2^n$，即 $a_n=\frac{1}{2^n-1}$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 满足上式，

$\therefore a_n=\frac{1}{2^n-1}$；　　……5分

（2）由（1）得 $a_n=\dfrac{1}{2^n-1}$，则 $\dfrac{1}{a_n}=2^n-1$，$\therefore \dfrac{n}{a_n}=n\cdot 2^n-n$，

$\therefore S_n=(1\times 2^1-1)+(2\times 2^2-2)+(3\times 2^3-3)+\ldots+(n\cdot 2^n-n)$

$=(1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots+n\cdot 2^n)-(1+2+3+\ldots+n)$

令 $A_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots+n\cdot 2^n$①，$B_n=1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

$2A_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\ldots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$②，

由①－②得 $-A_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}$，$\therefore A_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$，　　……10 分

$\therefore S_n=A_n-B_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2-\dfrac{n(n+1)}{2}$.　　……12 分

19.【解析】(1）记一轮踢球，甲进球为事件 A，乙进球为事件 B，A，B 相互独立，

由题意得：$P(A)=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$，甲的得分 X 的可能取值为 -1，0，1，

$P(X=-1)=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=(1-\dfrac{1}{3})\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}$，

$P(X=0)=P(AB)+P(\bar{A}\bar{B})=P(A)P(B)+P(\bar{A})P(\bar{B})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+(1-\dfrac{1}{3})\times(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{7}{12}$，

$P(X=1)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=\dfrac{1}{3}\times(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{4}$，

所以 X 的分布列为：

X	-1	0	1
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{7}{12}$	$\dfrac{1}{4}$

$E(X)=-1\times\dfrac{1}{6}+0\times\dfrac{7}{12}+1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$.　　……6 分

（2）经过三轮踢球，甲累计得分高于乙有四种情况：甲 3 轮各得 1 分；甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分，1 轮得 0 分；甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分，1 轮得-1 分；甲 3 轮中有 1 轮得 1 分，2 轮各得 0 分，

甲 3 轮各得 1 分的概率为 $P_1=(\dfrac{1}{4})^3=\dfrac{1}{64}$，

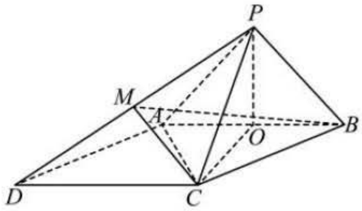
甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分，1 轮得 0 分的概率为 $P_2=C_3^2(\dfrac{1}{4})^2\times\dfrac{7}{12}=\dfrac{7}{64}$，

甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分，1 轮得-1 分的概率为 $P_3=C_3^2(\dfrac{1}{4})^2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{32}$，

甲 3 轮中有 1 轮得 1 分，2 轮各得 0 分的概率为 $P_4=C_3^1\times\dfrac{1}{4}\times(\dfrac{7}{12})^2=\dfrac{49}{192}$，

所以经过三轮踢球，甲累计得分高于乙的概率 $P=\dfrac{1}{64}+\dfrac{7}{64}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{49}{192}=\dfrac{79}{192}$.　　……12 分

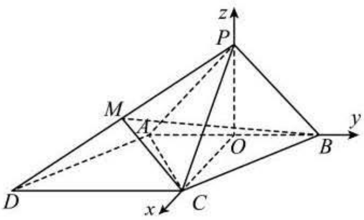
20. 【解析】（1）如图，取 AB 中点 O，连接 PO，CO.因为 $PA=PB=\sqrt{2}$，$AB=2$，所以 $PO\perp AB$，$PO=1$，$BO=1$.又因为 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，所以 $CO\perp AB$，$CO=\sqrt{3}$.因为 $PC=2$，所以 $PC^2=PO^2+CO^2$，所以 $PO\perp CO$.又因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，$CO\subset$ 平面 ABCD，$AB\cap CO=O$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.因为 $AD//BC$，$BC\subset$ 平面 PBC，$AD\not\subset$ 平面 PBC，所以 $AD//$ 平面 PBC，所以 $V_{D-PBC}=V_{A-PBC}=V_{P-ABC}=\frac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



因为 $V_{M-PBC}=\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}V_{D-PBC}$，所以点 M 到平面 PBC 的距离是点 D 到平面 PBC 的距离的 $\frac{1}{2}$，

所以 $PM=MD$. ……6 分

（2）由（1）知，$BO\perp CO$，$PO\perp BO$，$PO\perp CO$，如图，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系，则 $A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(\sqrt{3},-2,0)$，$P(0,0,1)$，所以 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，



$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-3,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$.设平面 α 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CM}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-3y=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x-y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$.取 $y=1$，得到平面 α 的一个法向量 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,5)$.因为 $Q\in AP$，设

$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=(0,\lambda,\lambda)$，则 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},\lambda-1,\lambda)$，因为 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{CQ}=-3+\lambda-1+5\lambda=0$，所以 $\lambda=\frac{2}{3}$，所以 $\overrightarrow{CQ}=\left(-\sqrt{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. ……8 分

设平面 BCQ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CQ}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1-\frac{y_1}{3}+\frac{2z_1}{3}=0\\ \sqrt{3}x_1-y_1=0\end{cases}$.取 $x_1=1$，得到平面 BCQ 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$.设平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角是 β，又因为 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量，则 $\cos\beta=\left|\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$，

故平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 的夹角是 $\frac{\pi}{6}$. ……12 分

21.【解析】(1) 依题意 $a=1$，$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{3}$，∴ E 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

(2) 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，AB 的方程为 $y=k_1(x-4)$，$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，CD 的方程为 $y=k_2(x-4)$，

联立 $\begin{cases}3x^2-y^2=3\\ y=k_1(x-4)\end{cases}$，得 $(k_1^2-3)x^2-8k_1^2x+16k_1^2+3=0$，∴ $x_1+x_2=\frac{8k_1^2}{k_1^2-3}$，从而

$y_1+y_2=k_1(x_1+x_2-8)=\frac{24k_1}{k_1^2-3}$，∴ $M(\frac{4k_1^2}{k_1^2-3},\frac{12k_1}{k_1^2-3})$. ∵ $k_1k_2=3$，∴ $k_2=\frac{3}{k_1}$，∴ $N(\frac{12}{3-k_1^2},\frac{12k_1}{3-k_1^2})$，∴ MN 的

斜率 $k_{MN}=\dfrac{\frac{12k_1}{k_1^2-3}-\frac{12k_1}{3-k_1^2}}{\frac{4k_1^2}{k_1^2-3}-\frac{12}{3-k_1^2}}=\frac{24k_1}{4k_1^2+12}=\frac{6k_1}{k_1^2+3}$，直线 MN 的方程为 $y-\frac{12k_1}{k_1^2-3}=\frac{6k_1}{k_1^2+3}(x-\frac{4k_1^2}{k_1^2-3})$，即

$y=\frac{6k_1}{k_1^2+3}(x-2)$. ∴直线 MN 恒过定点 $T(2,0)$. ……9 分

又∵ $\angle THG=90^\circ$，∴ H 的轨迹为以 TG 为直径的圆.取 TG 中点 $K(3,0)$，则 $|HK|=|TK|=|KG|=\frac{1}{2}|TG|=1$，

故存在定点 $K(3,0)$ 使 $|HK|$ 为定值. ……12 分

22.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{(4ax+1)(1-ax)}{x}$

若 $a=0$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)$在$(0,+\infty)$ 单调递增；

若 $a>0$，令 $f'(x)=0$, 解得 $x_1=\frac{1}{a}>0, x_2=-\frac{1}{4a}<0$(舍去)单调递增；$f(x)$ 在

$(0,\frac{1}{a})$单调递增，在$(\frac{1}{a},+\infty)$ 单调递减. ……4分

(2) ∵ $f(n^2)=3m-6e^{2m}+9e^m-3=3(\ln e^m-2e^{2m}+3e^m-1)$, ∴ $f(n^2)=3f(e^m)$. 若 $a=1$，由 (1) 知 $f(x)$ 在

$(0,1)$单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减. ∵ $0<m<1$，$n>1$，∴ $e^m>1, n^2>1$，又 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

∴要证 $e^m<n^2$，即证 $f(e^m)>f(n^2)=3f(e^m)$ 即证 $f(e^m)<0$，由 $f(x)$ 的单调性可知 $f(e^m)<f(1)=0$. …8 分

要证 $\frac{2n^2}{3}<e^m$，即证 $n^2<\frac{3e^m}{2}$. ∵ $n^2>1, \frac{3e^m}{2}>1$, $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，即证 $f(n^2)>f(\frac{3e^m}{2})$，即证

$3f(e^m)>f(\frac{3e^m}{2})$，即证 $g(m)=3f(e^m)-f(\frac{3e^m}{2})=2m-\frac{3e^{2m}}{2}+\frac{9e^m}{2}-2-\ln\frac{3}{2}>0$. $g'(m)=2-3e^{2m}+\frac{9e^m}{2}$,

$g''(m)=-6e^{2m}+\frac{9e^m}{2}=\frac{3e^m}{2}(3-4e^m)<0$, ∴ $g'(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减. ∵ $g'(0)=\frac{7}{2}>0, g'(1)=2-3e^2+\frac{9}{2}e<0$,

∴ $\exists m_1\in(0,1)$，$g(m)$在 $(0,m_1)$ 单调递增，在 $(m_1,1)$ 单调递减. $g(0)=1-\ln\frac{3}{2}>0, g(1)=-\frac{3}{2}e^2+\frac{9}{2}e-\ln\frac{3}{2}$,

∵ $\ln x\leqslant x-1$，∴ $\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$，∴ $g(1)=-\frac{3}{2}e^2+\frac{9}{2}e-\ln\frac{3}{2}>\frac{-3e^2+9e-1}{2}>0$，

∴ $g(m)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，证毕！ ……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线