

2022—2023 学年度(下)联合体高二期末检测

数 学

(满分:150 分 考试时间:120 分钟)

审题人:36 中 李永阳

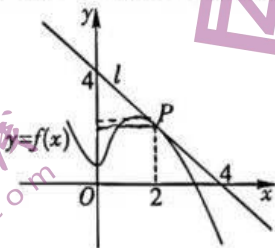
注意事项:

1. 答题时,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上.
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其他答案标号.
3. 答非选择题时,必须使用黑色墨水笔或黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上,写在试题卷、草稿纸上无效.
4. 考试结束后,将试题卷和答题卡一并交回.

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、单选题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题所给的四个选项中,有且只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} | (x+2)(x-1) \leq 0\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$ C. $\{-4, -3, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 0 \\ 4x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $f(a) = -\frac{1}{2}$, 则实数 a 的值为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{8}$ 或 $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{8}$ 或 $\frac{1}{2}$
3. 如图,直线 l 是函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $P(2, y)$ 处的切线,则 $f(2) + f'(2) =$ ()



- A. -3 B. -2 C. 2 D. 1
4. 已知随机变量 $X \sim B(n, p)$, 若 $E(X) = 1$, $D(X) = \frac{4}{5}$, 则 $P(X=4) =$ ()
A. $\frac{4}{625}$ B. $\frac{32}{125}$ C. $\frac{1}{125}$ D. $\frac{1}{25}$
5. 已知函数 $f(x)$ 满足性质: ①在定义域上有 $f(-x) + f(x) = 0$; ② $\forall x_1, x_2 \in (0, 1)$, 恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} < 0$, 则函数 $f(x)$ 可能为 ()
A. $f(x) = -2x$ B. $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ C. $f(x) = 3x^2$ D. $f(x) = \frac{5}{x}$



6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{17} < 0, a_6 + a_{13} > 0$, 则当 S_n 取得最小值时, n 的值为 ()
A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

7. 下列说法正确的是

A. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 0$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的充分不必要条件

B. 若不等式 $ax^2 + 2x + c > 0$ 的解集为 $|x-1| < x < 2$, 则 $\frac{c}{a} = 2$

C. 若 $a > b > c$, 则 $\frac{1}{b-c} > \frac{1}{a-c}$

D. 函数 $f(x) = x^2 + \frac{3}{x^2+2}$ 的最小值是 $2\sqrt{3}-2$

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 其导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) > f'(x) + 1, f(0) = 2023$, 则满足不等式 $e^{-x}f(x) > e^{-x} + 2022$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $(2022, +\infty)$

B. $(-\infty, 2023)$

C. $(0, 2022)$

D. $(-\infty, 0)$

- 二、多选题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题所给的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列求导运算正确的是

A. $(\sin^2 x)' = \sin 2x$

B. $(3^x + \log_3 x)' = (3^x + x) \ln 3$

C. $(e^x \sqrt{x})' = \frac{3}{2} e^x \sqrt{x}$

D. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

10. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 若 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax + b = 0$, 则下列命题为真命题的有 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$

B. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$

C. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$

D. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$

11. 若存在常数 k 和 b , 使得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对其公共定义域上的任意实数 x 都满足 $f(x) \geq kx + b$ 和 $g(x) \leq kx + b$ 恒成立, 则称此直线 $y = kx + b$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的“隔离直线”. 已知函数 $f(x) = x^2 (x \in \mathbf{R}), g(x) = -\frac{4}{x} (x > 0)$, 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间存在“隔离直线” $y = 4x - b$, 则实数 b 的取值可以是 ()

A. -5

B. 0

C. 4

D. 7

12. 如图, 将 n^2 个数排成 n 行 n 列的一个数阵, 该数阵第一列的 n 个数从上到下构成以 m 为公差的等差数列, 每一行的 n 个数从左到右构成以 $m(m > 0)$ 为公比的等比数列, a_{ij} 表示第 i 行第 j 个数. 已知 $a_{11} = 2, a_{13} = a_{61} + 1$, 记这 n^2 个数的和为 S . 下列结论正确的有 ()

a_{11} a_{12} a_{13} $\cdots$ a_{1n}

a_{21} a_{22} a_{23} $\cdots$ a_{2n}

$\cdots$

a_{n1} a_{n2} a_{n3} $\cdots$ a_{nn}

A. $m = 3$

B. $a_{67} = 17 \times 3^7$

C. $a_{ij} = (3i-1) \cdot 3^{j-1}$

D. $S = \frac{1}{4} n(3n+1)(3^n - 1)$



第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

三、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分)

13. 已知某品种小麦的穗粒数 X 服从正态分布 $N(38, \sigma^2)$, 且 $P(34 \leq X \leq 42) = 0.68$, 则该品种小麦的穗粒数超过 42 粒的概率为 _____.
14. 方程 $(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 20 = 0$ 的解集为 _____.
15. 某企业制造并出售球形瓶装的某种饮料, 瓶子的制造成本是 $1.6\pi r^2$ 分, 其中 r (单位: cm) 是瓶子的半径, 已知每 1 mL 饮料可售 0.4 分, 且能制作的瓶子的最大半径为 6 cm, 当每瓶饮料的利润最大时, 瓶子的半径为 _____ cm.
16. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, $f(x+1) + g(x-2) = 3$, $f(x-1) - g(-x) = 1$, 且 $g(-1) = 2$, $g(x-1)$ 为偶函数, 则 $\sum_{k=1}^{83} [f(k) + g(k)] =$ _____.

四、解答题(本大题共6小题,共70分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_1 = 2a_1 - 3$, 且 $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ($n \geq 2$).

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 $b_n = \log_2(a_{n+1} - 2)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12分) 玻璃杯整箱出售, 共 3 箱, 每箱 20 只. 假设各箱含有 0, 1, 2 只残次品的概率对应为 0.8, 0.1 和 0.1. 一顾客欲购买一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随意取一箱, 而顾客随机查看 4 只玻璃杯, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯; 否则不买. 设事件 A 表示“顾客买下所查看的一箱玻璃杯”, 事件 B_i 表示“箱中恰好有 i ($i=0, 1, 2$) 只残次品”. 求:

- (1) 顾客买下所查看的一箱玻璃杯的概率 $P(A)$;
- (2) 在顾客买下的一箱中, 没有残次品的概率 $P(B_0|A)$.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = (x-a)^3$, 其中 a 为常数, 函数 $f'(x)$ 是其导函数, 且满足 $f'(2) = 3$, $f'(-2) = 27$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在某点处的切线过点 $M\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, 求该切线的一般式方程.

20. (12分) 已知等差数列 $\{b_n\}$ 的首项为 -1 , 公差为 2 , 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = b_n$.

(1) 求 a_n 取得最小值时 n 的值;

(2) 若 $a_1 = \frac{3}{4}$, 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{4}{3}$.

21. (12分) 旅游承载着人们对美好生活的向往. 随着近些年人们收入和消费水平不断提高, 对品质生活的需求也日益升级, 旅游市场开启了快速增长的时代. 某旅游景区为吸引旅客, 提供了 A, B 两条路线方案. 该景区为进一步了解旅客对这两条路线的选择情况和满意度评价 (“好”或“一般”), 对 300 名旅客的路线选择和评价进行了统计, 如下表:

	A 路线		B 路线		合计
	好	一般	好	一般	
男	10	20	55	35	120
女	90	30	20	40	180
合计	100	50	75	75	300

(1) 根据以上数据, 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 可以认为对 A, B 两条路线的选择与性别有关吗?

(2) 某人计划到该景区旅游, 预先在网上了解了对这两条路线的评价, 假设他分别看了两条路线各三条评价 (评价 “好” 或 “一般” 的可能性以前面统计的占比为参考), 若评价为 “好” 的计 5 分, 评价为 “一般” 的计 2 分, 以期望值作为参考, 那么你认为这个人会选择哪一条路线? 请用计算说明理由.

附 $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$\alpha = P(\chi^2 \geq k)$	0.05	0.01	0.001
k	3.841	6.635	10.828

22. (12分) 已知函数 $f(x) = 2e^x - x^2 - 2ax - a^2$.

(1) 若 $a > 0$, 讨论函数 $g(x) = f(x) + x^2$ 的单调性和极值情况;

(2) 若 $a = 1$, 求证: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) > 0$;

(3) 若 $a \in [-\sqrt{2}, 2 - \ln 2]$, 求证: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$.

2022—2023 学年度(下)联合体高二期末检测

数学 参考答案及评分标准

一、单选题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. C 【解析】解 $(x+2)(x-1) \leq 0$, 得 $-2 \leq x \leq 1$, 则 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, 所以 $C_U A = \{-4, -3, 2\}$. 故选: C.

2. D 【解析】当 $a > 0$ 时, $f(a) = a - 1 = -\frac{1}{2}$, 解得 $a = \frac{1}{2}$; 当 $a \leq 0$ 时, $f(a) = 4a = -\frac{1}{2}$, 解得 $a = -\frac{1}{8}$. 故选: D.

3. D 【解析】由图可得函数 $y = f(x)$ 的图象在点 P 处的切线 l 与 x 轴交于点 $(4, 0)$, 与 y 轴交于点 $(0, 4)$, 则切线 $l: x + y = 4$, $\therefore f(2) = 2, f'(2) = -1$, 所以 $f(2) + f'(2) = 1$. 故选: D.

4. A 【解析】由 $E(X) = 1, D(X) = \frac{4}{5}$, 得 $np = 1, np(1-p) = \frac{4}{5}$, 解得 $n = 5, p = \frac{1}{5}$, 所以 $P(X = 4) = C_5^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{625}$. 故选: A.

5. B 【解析】由①, 得 $f(-x) = -f(x)$, 即函数 $f(x)$ 是奇函数. 由②, 得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增.

A 选项: $f(x) = -2x$ 是正比例函数, 是奇函数, 但在 $(0, 1)$ 上单调递减, 不符合题意;

B 选项: $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ 是奇函数. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\frac{3}{2}x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$. 因为 $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以 $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 符合题意;

C 选项: $f(x) = 3x^2$ 是顶点在原点的二次函数, 是偶函数, 不符合题意;

D 选项: $f(x) = \frac{5}{x}$ 是反比例函数, 是奇函数, 但在 $(0, 1)$ 上单调递减, 不符合题意. 故选: B.

6. B 【解析】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $S_{17} < 0$, 得 $\frac{17(a_1 + a_{17})}{2} < 0$, 则 $a_1 + a_{17} = 2a_9 < 0$.

又 $a_6 + a_{13} = a_9 + a_{10} > 0$, 所以 $a_9 < 0, a_{10} > 0$, 所以当 $n = 9$ 时, S_n 取得最小值. 故选: B.

7. C 【解析】A 选项: 由 $|x - 1| < 1$ 得 $-1 < x - 1 < 1$, 解得 $0 < x < 2$, 所以“ $x > 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的必要不充分条件, A 错误;

B 选项: 由题意得关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + c = 0$ 的根为 -1 和 2 , 所以 $\frac{c}{a} = (-1) \times 2 = -2$, B 错误;

C 选项: 因为 $a > b > c$, 所以 $a - c > 0, b - c > 0, a - b > 0$, 所以 $\frac{1}{b-c} - \frac{1}{a-c} = \frac{a-b}{(b-c)(a-c)} > 0$, 所以 $\frac{1}{b-c} > \frac{1}{a-c}$, C 正确;

D 选项: 因为 $x^2 + 2 + \frac{3}{x^2+2} \geq 2\sqrt{(x^2+2) \cdot \frac{3}{x^2+2}} = 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $x^2 + 2 = \frac{3}{x^2+2}$ 时等号成立, 此时 x 无实数解, 所以 $f(x) = x^2 + \frac{3}{x^2+2}$ 无最小值, D 错误. 故选: C.

8. D 【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)-1}{e^x}$. 因为 $f(x) > f'(x) + 1$, 即 $f'(x) - f(x) + 1 < 0$, 所以 $g'(x) = \frac{f'(x)-f(x)+1}{e^x} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减. 又因为 $f(0) = 2023$, 所以 $g(0) = \frac{f(0)-1}{e^0} = 2022$. 由 $e^{-x}f(x) > e^{-x} + 2022 \Leftrightarrow \frac{f(x)-1}{e^x} > 2022 = g(0)$, 即 $g(x) > g(0)$, 所以 $x < 0$. 所以满足题中不等式的 x 的取值范围为 $(-\infty, 0)$. 故选: D.

二、多选题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

9. AD 【解析】A 选项: $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, A 正确;

B 选项: $(3^x + \log_3 x)' = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x \ln 3}$ B 错误;

C 选项: $(e^x \sqrt{x})' = e^x \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$, C 错误;

D 选项: $(\frac{\ln x}{x})' = \frac{\frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, D 正确. 故选: AD.

10. BCD 【解析】因为 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax + b = 0$, 所以 $x_0 = -\frac{b}{2a}$. 所以 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 在 x_0 处取得最小值.

由 A 选项, 得 $f(x)$ 在 x_0 处取得最大值, A 选项为假命题;

由 B 选项, 得 $f(x)$ 在 x_0 处取得最小值, B 选项为真命题;

C 选项, 当 $x = x_0$ 时, $f(x) = f(x_0)$, C 选项为真命题;

D 选项, 因为 $f(x)$ 在 x_0 处取得最小值, 所以 $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$ 是真命题. 故选: BCD.

11. CD 【解析】若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间存在隔离直线 $y = 4x - b$.

则对任意的 $x > 0$, $f(x) = x^2 \geq 4x - b$, 即 $x^2 - 4x + b \geq 0$.

所以 $\Delta = 16 - 4b \leq 0$, 解得 $b \geq 4$;

对任意的 $x > 0$, $g(x) = -\frac{4}{x} \leq 4x - b$, 则 $b \leq 4x - \frac{4}{x}$.

因为 $4x - \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{4}{x}} = 8$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立, 所以 $b \leq 8$.

所以 $4 \leq b \leq 8$, 所以实数 b 的取值可以是 4 或 7. 故选: CD.

12. ACD 【解析】因为 $a_1 = 2$, $a_{13} = 2m^2$, $a_6 = 2 + 5m$, 所以 $2m^2 = 2 + 5m + 1$, 解得 $m = 3$ 或 $m = -\frac{1}{2}$ (舍去). A 正确;

所以 $a_{11} = a_1 \cdot 3^{10} = [a_{11} + (i-1) \cdot m] \cdot 3^{i-1} = (3i-1) \cdot 3^{i-1}$, C 正确;

所以 $S_6 = (3 \times 6 - 1) \times 3^{6-1} = 17 \times 3^5$, B 错误;

所以 $S = (a_1 + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{2n}) + \dots + (a_{n1} +$

$a_{n2} + a_{n3} + \dots + a_{nn})$

$= \frac{a_{11}(1-3^n)}{1-3} + \frac{a_{21}(1-3^n)}{1-3} + \dots + \frac{a_{n1}(1-3^n)}{1-3}$

$= \frac{1}{2}(3^n - 1) \cdot \frac{(2+3n-1)n}{2}$

$= \frac{1}{4}n(3n+1)(3^n - 1)$, D 正确. 故选: ACD.

三、填空题 (本大题共4 小题, 每小题5 分, 共 20 分)

13.0.16 【解析】该品种小麦的穗粒数超过42粒的概率 $P(X > 42) = \frac{1 - P(34 \leq X \leq 42)}{2} = \frac{1 - 0.68}{2} = 0.16$. 故答案为 : 0.16.

14. $\{-1, 2, 5\}$ 【解析】 $(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 20 = (x^2 - 4x - 5)(x^2 \geq 4x + 4) = (x - 5)(x + 1)(x - 2)^2 = 0$, 所以 $x = 5$ 或 $x = -1$ 或 $x = 2$, 故该方程的解集为 $\{-1, 2, 5\}$. 故答案为 : $\{-1, 2, 5\}$.

15.6 【解析】设每瓶饮料获得的利润为 $f(r)$. 根据题意, 得 $f(r) = 0.4 \times \frac{4}{3} \pi r^3 - 1.6 \pi r^2 = \frac{8\pi r^3 - 24\pi r^2}{15}$ ($0 < r \leq 6$), 则 $f'(r) = \frac{8\pi r}{5}(r - 2)$, 于是当 $0 < r < 2$ 时, $f'(r) < 0$, $f(r)$ 单调递减; 当 $2 < r \leq 6$ 时, $f'(r) > 0$, $f(r)$ 单调递增, $r = 2$ 是极小值点, 所以当 $r = 6$ 时, $f(r)$ 取得最大值, 故答案为 : 6.

16.248 【解析】 $f(x+1) + g(x-2) = 3$ ①.

因为 $g(x-1)$ 为偶函数, 所以 $g(-x-1) = g(x-1)$.

用 $x-1$ 代替 x 得 $g(-x) = g(x-2)$,

所以 $f(x-1) - g(-x) = 1$ 可化为 $f(x-1) - g(x-2) = 1$ ②.

由①+②, 得 $f(x+1) + f(x-1) = 4$, 进而得 $f(x) = f(x+4)$,

所以 $\sum_{k=1}^{83} f(k) = 41 \times 4 + f(2) = 164 + f(2)$.

在②中用 $x+2$ 替换 x , 得 $f(x+1) - g(x) = 1$ ③.

由①-③, 得 $g(x-2) + g(x) = 2$, 进而得 $g(x) = g(x+4)$,

所以 $\sum_{k=1}^{83} g(k) = 41 \times 2 + g(2) = 82 + g(2)$.

在①中令 $x = 1$, 可得 $f(2) + g(-1) = 3$, 所以 $f(2) = 1$.

在 $g(-x-1) = g(x-1)$ 中, 令 $x = 1$, 得 $g(-2) = g(0)$

又因为 $g(-2) + g(0) = 2$, 所以 $g(0) = g(-2) = 1$, 则 $g(2) = 1$,

所以 $\sum_{k=1}^{83} [f(k) + g(k)] = 164 + 82 + f(2) + g(2) = 248$. 故答案为 : 248.

四、解答题 (本大题共6 小题, 共 70 分)

规范解答	评分细则
17.解 : (1) 由 $S_n = a_n = 2a_{n-1} - 3$, 解得 $a_n = 3$.1 分 因为 $a_n = 2a_{n-1} - 2$, 所以 $a_n - 2 = 2(a_{n-1} - 2)(n \geq 2)$. 又 $a_1 - 2 = 1$, 所以数列 $\{a_n - 2\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 所以 $a_n - 2 = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$,4 分 所以 $a_n = 2^{n-1} + 2$.5 分	

(2) 由 (1) 得 $a_n - 2 = 2^{n-1}$, 所以 $a_{n+1} - 2 = 2^n$, 所以 $b_n = \log_2(a_{n+1} - 2) = n$,7 分 所以 $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$.10 分 18. 解: (1) 由题设可知, $P(B_0) = 0.8$, $P(B_1) = 0.1$, $P(B_2) = 0.1$, 且 $P(A B_0) = 1$, $P(A B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}$, $P(A B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19}$, 所以 $P(A) = P(B_0)P(A B_0) + P(B_1)P(A B_1) + P(B_2)P(A B_2) = 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19} = \frac{448}{475}$, 即顾客买下所查看的一箱玻璃杯的概率为 $\frac{448}{475}$.7 分 (2) 因为 $P(B_0 A) = \frac{P(B_0)P(A B_0)}{P(A)} = \frac{0.8 \times 1}{\frac{448}{475}} = \frac{95}{112}$, 所以在顾客买下的一箱中, 没有残次品的概率是 $\frac{95}{112}$.12 分 19. 解: (1) 由 $f(x) = (x-a)^3$, 得 $f'(x) = 3(x-a)^2$, 所以 $\begin{cases} 3(2-a)^2 = 3, \\ 3(-2-a)^2 = 27, \end{cases}$ 解得 $a = 1$, 所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = (x-1)^3$.4 分 (2) 因为 $f(\frac{5}{3}) = (\frac{5}{3}-1)^3 \neq 0$, 所以点 $M(\frac{5}{3}, 0)$ 不在函数 $f(x)$ 的图象上, 即其不是切点, 则设切点为 (x_0, y_0). $f'(x) = 3(x-1)^2$, 则该切线的斜率为 $k = 3(x_0-1)^2$.6 分 又因为该切线过点 $M(\frac{5}{3}, 0)$, 所以 $k = \frac{(x_0-1)^3 - 0}{x_0 - \frac{5}{3}} = 3(x_0-1)^2$, 解得 $x_0 = 1$ 或 $x_0 = 2$.9 分 当 $x_0 = 1$ 时, $k = 0$, 此时切线方程为 $y = 0$; 当 $x_0 = 2$ 时, $k = 3$, 此时切线方程为 $y = 3(x - \frac{5}{3})$, 即 $3x - y - 5 = 0$. 综上所述, 该切线的一般式方程为 $y = 0$ 或 $3x - y - 5 = 0$.12 分 20. (1) 解: 由 $a_{n+1} - a_n = b_n$, 得 $a_2 - a_1 = b_1$, $a_3 - a_2 = b_2$, $\cdots$, $a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$, 累加可得: $a_n - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$,2 分 所以 $a_n = a_1 + (n-1) \times (-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times 2$ $= n^2 - 4n + 3 + a_1$ $= (n-2)^2 + a_1 - 1,$ 当 a_n 取最小值时, n 的值为 2.5 分	直接列式计算的, 正确即可得分. 直接列式计算的, 正确即可得分. 漏掉 1 种情况扣 2 分.
--	---

(2) 证明: 若 $a_1 = \frac{3}{4}$, 则 $\frac{1}{a_1} = \frac{4}{3}$, $a_n = n^2 - 4n + \frac{15}{4} = (n - \frac{5}{2})(n - \frac{3}{2})$, 所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{(-\frac{3}{2}) \times (-\frac{1}{2})} + \frac{1}{(-\frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} + \dots + \frac{1}{(n-\frac{5}{2}) \times (n-\frac{3}{2})}$ $= \left(\frac{1}{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-\frac{5}{2}} - \frac{1}{n-\frac{3}{2}}\right)$ $= -\frac{2}{3} - \frac{2}{2n-3} \dots \dots \dots 10$ 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 0$, 所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_1} = \frac{4}{3}$. $\dots \dots \dots 12$ 分 21. 解: (1) 由题意, 得 $a = 30$, $b = 90$, $c = 120$, $d = 60$, $n = 30 + 90 + 120 + 60 = 300$, 所以 $a + b = 120$, $c + d = 180$, $a + c = 150$, $b + d = 150$, 所以 $\chi^2 = \frac{300 \times (30 \times 60 - 120 \times 90)^2}{120 \times 180 \times 150 \times 150} = 50$. $\dots \dots \dots 2$ 分 因为 $50 > 10.828$, $\therefore \dots \dots \dots 3$ 分 所以在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 可以认为对 A, B 两条路线的选择与性别有关. $\dots \dots \dots 4$ 分 (2) A 路线的好评率为 $\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$, 一般评率为 $\frac{1}{3}$. B 路线的好评率为 $\frac{75}{150} = \frac{1}{2}$, 一般评率为 $\frac{1}{2}$. $\dots \dots \dots 5$ 分 设 A 路线和 B 路线累计分数分别为 X, Y, 则 X, Y 的可能取值都为 6, 9, 12, 15, 则 $P(X = 6) = C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ $P(X = 9) = C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}$ $P(X = 12) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{27}$ $P(X = 15) = C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ 所以 $E(X) = \frac{1}{27} \times 6 + \frac{6}{27} \times 9 + \frac{12}{27} \times 12 + \frac{8}{27} \times 15 = 12$. $\dots \dots \dots 8$ 分 $P(Y = 6) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $P(Y = 9) = C_3^1 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ $P(Y = 12) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ $P(Y = 15) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ 所以 $E(Y) = \frac{1}{8} \times 6 + \frac{3}{8} \times 9 + \frac{3}{8} \times 12 + \frac{1}{8} \times 15 = 10.5$. $\dots \dots \dots 11$ 分 因为 $E(X) > E(Y)$, 所以这个人会选择 A 路线. $\dots \dots \dots 12$ 分	或 $a_n = \frac{(2n-5)(2n-3)}{4}$. 未写出 a, b, c, d 的值, 但代入正确、计算正确即可得分. 只结论错误, 扣 1 分. 计算正确, 均可得分.
---	--

22. (1) 解: $g(x) = f(x) + x^2 = 2e^x - 2ax - a^2$, 则 $g'(x) = 2e^x - 2a$. 令 $g'(x) = 0$, 则 $x = \ln a$.1 分 当 $x < \ln a$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > \ln a$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,2 分 所以 $g(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取得极小值.3 分 (2) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 因为 $f'(x) = 2e^x - 2x - 2a$, 令 $h(x) = 2e^x - 2x - 2a$, 则 $h'(x) = 2e^x - 2 \geq 0$, 故 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增,5 分 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = 2e^x - 2x - 2 \geq f'(0) = 0$,6 分 故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, 则 $f(x) \geq f(0) = 1 > 0$.7 分 (3) 证明: 由 (2) 可知 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $f'(0) = 2 - 2a$. ① 当 $a \in [-\sqrt{2}, 1]$ 时, $f'(x) \geq f'(0) = 2 - 2a \geq 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, 所以 $f(x) \geq f(0) = 2 - a^2 \geq 0$;8 分 ② 当 $a \in (1, 2 - \ln 2]$ 时, $f'(0) = 2 - 2a < 0$. 因为 $f'(1) = 2e - 2 - 2a > 0$, 故存在 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f'(x_0) = 2e^{x_0} - 2x_0 - 2a = 0$ (*). 又因为 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, 所以当 $0 \leq x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)_{\min} = f(x_0) = 2e^{x_0} - x_0^2 - 2ax_0 - a^2$.10 分 由 (*) 得 $a = e^{x_0} - x_0$, 代入上式, 得 $f(x_0) = 2e^{x_0} - x_0^2 - 2(e^{x_0} - x_0)x_0 - (e^{x_0} - x_0)^2 = e^{x_0}(2 - e^{x_0})$. 因为 $a = e^{x_0} - x_0 \leq 2 - \ln 2$, 令 $g(x) = e^x - x$, 所以 $g(x_0) \leq g(\ln 2)$, $g'(x) = e^x - 1$. 当 $x \geq 0$ 时, $g'(x) \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $0 < x_0 \leq \ln 2$,11 分 所以 $2 - e^{x_0} \geq 0$, 则 $f(x_0) = e^{x_0}(2 - e^{x_0}) \geq 0$, 所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x)_{\min} \geq 0$, 即 $f(x) \geq 0$ 得证.12 分	参考关键步骤的赋分, 合理给分即可.
--	---------------------------

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线