雅礼中学2023届模拟试卷(二)

数　学

命题人：　　　　　审题人：

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共12页.时量120分钟,满分150分.

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|x^2-4x-5\leqslant 0\}$,$B=\{x|\log_2 x<2\}$,则 $A\cap B=$ (D)

A.$[-1,4)$　　B.$[-1,4]$　　C.$[-1,5]$　　D.$(0,4)$

【解析】$\because A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x|0<x<4\}$,$\therefore A\cap B=(0,4)$.故选D.

2.已知数列$\{a_n\}$,若 $a_1+a_{2n-1}=4n-6$,则 $a_7=$ (B)

A.9　　B.11　　C.13　　D.15

【解析】由 $a_1+a_{2n-1}=4n-6$,可得 $a_1+a_1=4-6=-2$,解得 $a_1=-1$,

则 $a_{2n-1}=4n-6-a_1=4n-6+1=4n-5$,$a_7=4\times4-5=11$.

故选B.

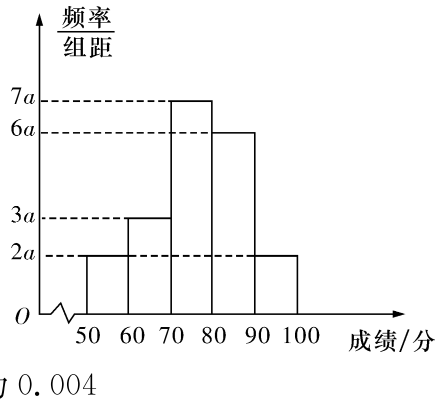
3.1614年纳皮尔在研究天文学的过程中为了简化计算而发明对数;1637年笛卡尔开始使用指数运算;1770年,欧拉发现了指数与对数的互逆关系,指出:对数源于指数,对数的发明先于指数,称为数学史上的珍闻.若 $2^x=\frac{5}{2}$,$\lg 2\approx0.3010$,则 x 的值约为 (A)

A. 1.322　　B. 1.410　　C. 1.507　　D. 1.669

【解析】由题意可知 $2^x=\frac{5}{2}$,则 $x=\log_2\frac{5}{2}=\log_2 5-1=\frac{\lg 5}{\lg 2}-1=\frac{1-\lg 2}{\lg 2}-1=\frac{1}{\lg 2}-2\approx1.322$,

故选A.

4.某校1000名学生参加环保知识竞赛,随机抽取了20名学生的考试成绩(单位:分),成绩的频率分布直方图如图所示,则下列说法正确的是 (D)



A.频率分布直方图中 a 的值为0.004

B.估计这20名学生考试成绩的第60百分位数为75

C.估计这20名学生考试成绩的众数为80

D.估计总体中成绩落在$[60,70)$内的学生人数为150

【解析】由频率分布直方图,得:$10\times(2a+3a+7a+6a+2a)=1$,解得 $a=0.005$,故A错误;

前三个矩形的面积和为 $10(2a+3a+7a)=0.6$，所以这 20 名学生考试成绩的第 60 百分数为 80，故 B 错误；

这 20 名学生考试成绩的众数为 75，故 C 错误；

总体中成绩落在 $[60,70)$ 内的学生人数为 $3a\times10\times1000=150$，故 D 正确.

故选 D.

5. 2020 年，新型冠状病毒引发的疫情牵动着亿万人的心. 八方驰援战疫情，众志成城克时难，社会各界支援湖北，共抗新型冠状病毒肺炎. 郑州某医院的甲、乙、丙、丁、戊 5 名医生到湖北的 A、B、C 三个城市支援，若要求每个城市至少安排 1 名医生，则 A 城市恰好只有医生甲去支援的概率为 (B)

A. $\frac{1}{15}$　　B. $\frac{7}{75}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{1}{2}$

【解析】5 个医生分到三个城市的方法，分成两步：

先将 5 人分成三组，有两种分组：若分成 3，1，1 的三组，则总共有 $C_5^3=10$ 种，若分成 1，2，2 的三组，则总共有 $\frac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}=15$ 种，则一共有 $15+10=25$ 种，

再将分成的三组全排列为 $25\times A_3^3=150$ 种，

A 城市恰好只有医生甲去之后，剩下的 4 人分配方法分两步：

现将 4 人分成两组：若分成 2，2 两组，有 $\frac{1}{2}C_4^2=3$ 种，若分成 1，3 两组，有 $C_4^1=4$ 种，共有 $3+4=7$ 种，

再将分好的两组进行全排列，则总共有 $7\times A_2^2=14$ 种，

则 A 城市恰好只有医生甲去支援的概率为 $\frac{14}{150}=\frac{7}{75}$，故选 B.

6. 一条斜率为 1 的直线分别与曲线 $y=\ln x+1$ 和曲线 $y=\sin x(-\pi<x<\pi)$ 相切于点 A 和点 B，则公切线段 AB 的长为 (D)

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

【解析】一条斜率为 1 的曲线 $y=\ln x+1$ 相切，则 $\frac{1}{x}=1$，$x=1$，则 $A(1,1)$，

斜率为 1 的直线与 $y=\sin x$ 相切，则 $\cos x=1$，$x=0$，则 $B(0,0)$，

所以公切线段 AB 的长为 $\sqrt{2}$，故选 D.

7. 若 $a=(1+\tan 20^\circ)(1+\tan 21^\circ)$，$b=(1+\tan 24^\circ)(1+\tan 25^\circ)$，则下列结论不正确的是 (D)

A. $a<b$　　B. $ab=4$　　C. $a+b>4$　　D. $a^2+b^2=9$

【解析】对于 A：由于 $\tan 45^\circ=\tan(21^\circ+24^\circ)=\frac{\tan 21^\circ+\tan 24^\circ}{1-\tan 21^\circ\tan 24^\circ}$，

所以，$1-\tan 21^\circ\tan 24^\circ=\tan 21^\circ+\tan 24^\circ$，整理得：$\tan 21^\circ\tan 24^\circ+\tan 21^\circ+\tan 24^\circ=1$；

所以 $1+\tan 21^\circ\tan 24^\circ+\tan 21^\circ+\tan 24^\circ=2$，

故 $a=(1+\tan 20^\circ)(1+\tan 21^\circ)<2$，$\mathrm{b}=(1+\tan 24^\circ)(1+\tan 25^\circ)>2$，故 A 正确；

对于 B：由于 $1=\tan 45^\circ=\tan(21^\circ+24^\circ)=\frac{\tan 21^\circ+\tan 24^\circ}{1-\tan 21^\circ\tan 24^\circ}$，

所以 $1-\tan 21^\circ\tan 24^\circ=\tan 21^\circ+\tan 24^\circ$，即 $\tan 21^\circ+\tan 24^\circ+\tan 21^\circ\tan 24^\circ=1$，

故 $(1+\tan 21^\circ)(1+\tan 24^\circ)=\tan 21^\circ+\tan 24^\circ+\tan 21^\circ\tan 24^\circ+1=2$，

同理 $(1+\tan 20^\circ)(1+\tan 25^\circ)=2$，

所以 $ab=(1+\tan 20^\circ)(1+\tan 21^\circ)(1+\tan 24^\circ)(1+\tan 25^\circ)=2\times 2=4$，故 B 正确；

对于 C：由于 $a<2,b>2$，且 $ab=4$，故 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（由于 $a\neq b$，等号不成立），故 $a+b>4$，故 C 正确；

对于 D：假设 $a^2+b^2=9$ 成立，故 $a^2+\frac{16}{a^2}=9$，解得 $a^2=\frac{9\pm\sqrt{17}}{2}$，

由于 $\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=2-\sqrt{3}$，

$1+\tan 24^\circ>1+\tan 15^\circ$，$1+\tan 21^\circ>1+\tan 15^\circ$，$a=(1+\tan 21^\circ)(1+\tan 24^\circ)>(1+\tan 15^\circ)^2$，

所以 $a>(3-\sqrt{3})^2=12-6\sqrt{3}>1$，

所以 $a^2>(3-\sqrt{3})^4=36\times(7-4\sqrt{3})$，由于 $a<b$，

所以 $a^2<ab=4$，

故 $\frac{9+\sqrt{17}}{2}>4>a^2>36\times(7-4\sqrt{3})>\frac{9-\sqrt{17}}{2}$，所以假设不成立，故 D 错误.

故选 D.

8. 若 $xe^x=1$，$\ln y-\frac{e}{y}=1$，则 $xy=$ （B）

A. 3　　B. e　　C. $\frac{1}{e}$　　D. 1

【解析】由 $\ln y-\frac{e}{y}=1$，可得 $\ln\frac{y}{e}=\frac{e}{y}$，则 $\frac{y}{e}\ln\frac{y}{e}=1$，令 $t=\ln\frac{y}{e}$，则 $te^t=1$.

又因为 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $t=x$，即 $y=e^{x+1}$，则 $xy=xe^{x+1}=e$.

故选 B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交椭圆 E 于 A,B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，则 （ABD）

A. 直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x-3)$　　B. $a^2=2b^2$

C. 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】因为直线 AB 过点 $F(3,0)$ 和点 $(1,-1)$，所以直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x-3)$.

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，消去 y，得 $\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)x^2-\frac{3}{2}a^2x+\frac{9}{4}a^2-a^2b^2=0$，

所以 AB 的中点的横坐标为 $\frac{\frac{3}{2}a^2}{2\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)}=1$，即 $a^2=2b^2$.

又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=c=3$，$a=3\sqrt{2}$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$. 故选 ABD.

10. 函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $f(x)$ 的图象. 若对于任意 $x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1+\theta)+x_2=1$，则 θ 的可能值为 (BD)

A. π B. $\frac{7}{6}\pi$ C. $\frac{3}{2}\pi$ D. $\frac{4}{3}\pi$

【解析】由题意可得：$f(x)=2\sin x+2$，对于任意 $x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在 $x_2\in[0,1]$，

使得 $f(x_1+\theta)=1-x_2$，显然 $1-x_2\in[0,1]$，

故对于任意 $x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都有函数 $f(x_1+\theta)=2\sin(x_1+\theta)+2$ 的值域是$[0,1]$的子集，

易得此时 $x_1+\theta\in\left[\theta,\theta+\frac{\pi}{2}\right]$，

代入 A 项，由正弦函数的图象与性质知此时 $f(x_1+\theta)\in[0,2]$，不符合题意；

代入 B 项，同理知此时 $f(x_1+\theta)\in[0,1]$符合题意；

代入 C 项，知此时 $f(x_1+\theta)\in[0,2]$不符合题意；

代入 D 项，知此时 $f(x_1+\theta)\in[0,1]$符合题意.

故选 BD.

11. 下列说法正确的有 (AB)

A. 设直线系 M：$(x-2)\cos\theta+y\sin\theta=1(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，则存在一个圆与 M 中所有直线相交

B. 设直线系 M：$(x-2)\cos\theta+y\sin\theta=1(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，则存在一个圆与 M 中所有直线相切

C. 如果圆 C：$x^2+y^2-2\sqrt{2}ax-2\sqrt{2}ay+2a^2+4=0$ 与圆 O：$x^2+y^2=4$ 有四条公切线，则实数 a 的取值范围是 $a>\sqrt{2}$

D. 过点$(6,8)$作圆 O'：$x^2+y^2=a$ 的切线，切点为 A，B，若直线 AB 的方程为 $3x+4y-2=0$，则 $a=2$

【解析】根据直线系 M：$(x-2)\cos\theta+y\sin\theta=1(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，得到所有的直线都为圆心为$(2,0)$，半径为 1 的圆的切线，故 B 正确；可取圆心为$(2,0)$，半径为 2 的圆，则所有直线与圆相交，故 A 正确；

对 C，圆 C 方程为：$(x-\sqrt{2}a)^2+(y-\sqrt{2}a)^2=2a^2-4$，则 $a>\sqrt{2}$，

圆心坐标为$(\sqrt{2}a,\sqrt{2}a)$，半径为 $\sqrt{2a^2-4}$，

要使圆 C 与圆 O 有四条公切线，则两圆外离，故$\sqrt{(\sqrt{2}a)^2+(\sqrt{2}a)^2}>\sqrt{2a^2-4}+2$，整理得 $2a^2-8a+2=2(a-2)^2>0$，解得 $a\neq2$，所以 a 的取值范围是$\{a|a>\sqrt{2}$ 且 $a\neq2\}$，C 错误；

对 D，圆 O'：$x^2+y^2=a$ 的圆心为$(0,0)$，半径为$\sqrt{a}$，记 $P(6,8)$，

由题，$|O'P|=10$，设 AB 中点为 D，

根据平面几何的性质有 $PD\perp AB$，则 $|PD|=\frac{|3\times6+4\times8-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{48}{5}$，则 $|O'D|=|O'P|-|PD|=\frac{2}{5}$，由平面几何的性质，有 $\mathrm{Rt}\triangle O'AP$ 中，$O'A^2=O'D\cdot O'P=\frac{2}{5}\times10=4$，故 $a=4$，D 错误.

故选 AB.

12. 已知函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|-\sin 2x-1$，则下列说法正确的是 （ACD）

A. $f(x)$是以 π 为周期的函数

B. 直线 $x=\frac{\pi}{2}$是曲线 $y=f(x)$的对称轴

C. 函数 $f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$\sqrt{2}-2$

D. 若函数 $f(x)$在区间$(0,M\pi)$上恰有 2023 个零点，则$\frac{2023}{2}<M\leqslant1012$

【解析】对于 A，因为 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 $f(x)$是以 π 为周期的函数，故 A 正确；

对于 B，有 $f(\pi-x)=|\sin x|+|\cos x|+\sin 2x-1\neq f(x)$，故 B 错误；

对于 C，由 A 知只需考虑 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上的最大值，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=-t^2+t=u(t)$，

易知 $u(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递减，所以，$f(x)$的最大值为 $u(1)=0$，最小值为 $u(\sqrt{2})=\sqrt{2}-2$；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，令 $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=t^2+t-2=v(t)$，

易知 $v(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递增，所以，$f(x)$的最大值为 $v(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，最小值为 $v(1)=0$，

综合可知：函数 $f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$\sqrt{2}-2$，故 C 正确；

对于 D，因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，可以先研究函数 $f(x)$在区间$(0,\pi]$上的零点个数，易知 $f(\pi)=0$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，令 $f(x)=u(t)=-t^2+t=0$，解得 $t=0$ 或 1，

$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ 在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上无解，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ 在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上仅有一解 $x=\frac{\pi}{2}$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，令 $f(x)=v(t)=t^2+t-2=0$，解得 $t=-2$ 或 1，

$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-2$ 在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上无解，$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ 在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上也无解，

综合可知：函数 $f(x)$在区间$(0,\pi]$上有两个零点，分别为 $x=\frac{\pi}{2}$和 $x=\pi$，

又因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，所以，若 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(x)$在区间$(0,n\pi]$上恰有 $2n$ 个零点，

又已知函数 $f(x)$在区间$(0,M\pi)$上恰有 2023 个零点，所以$\frac{2023}{2}<M\leqslant1012$，故 D 正确.

故选 ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 $z=3+4\mathrm{i}$，i 为虚数单位，则复数 $z-|z|+(1-\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点的坐标为__$(-1,3)$__.

【解析】$\because z=3+4\mathrm{i}$，$\therefore |z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，则 $z-|z|+(1-\mathrm{i})=3+4\mathrm{i}-5+(1-\mathrm{i})=-1+3\mathrm{i}$，

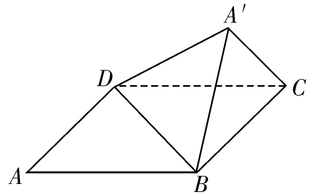
$\therefore$ 复数 $z-|z|+(1-\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(-1,3)$.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,2)$，若非零向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角都相等，则 $\boldsymbol{c}$ 的坐标为__$(1,1)$__.

（写出一个符合要求的答案即可）

【解析】（答案不唯一，直线 $y=x$ 上除原点外其它点都可）

15. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$AB=3$，$AD=2$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，现将 $\triangle ABD$ 沿直线 BD 翻折，得到三棱锥 $A'-BCD$，若 $A'C=\sqrt{7}$，则三棱锥 $A'-BCD$ 的内切球表面积为__$\frac{2\pi}{3}$__.



【解析】$\triangle ABD$ 中 $AB=3$，$AD=2$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

故 $DB=\sqrt{3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$，

则折成的三棱锥 $A'-BCD$ 中 $A'C=DB$，$A'B=AB=DC$，$A'D=AD=BC$，

即此三棱锥的对棱相等，故此三棱锥的三组对棱是一个长方体的六个面的对角线，

设长方体从同一个顶点出发的三条棱长分别为 a,b,c，

则 $\begin{cases}a^2+b^2=7,\\a^2+c^2=4,\\b^2+c^2=9,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\b=\sqrt{6},\\c=\sqrt{3},\end{cases}$

又因为三棱锥 $A'-BCD$ 是长方体切掉四个角（每个角均是三棱锥，四个顶点中的一个是长方体某顶点 O，

另外三个顶点是长方体中和顶点 O 相邻的三个顶点，每个角的体积均为正方体体积的六分之一）的余下部分，

故三棱锥 $A'-BCD$ 的体积为 $abc-\frac{2}{3}abc=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times1\times\sqrt{6}=\sqrt{2}$，

三棱锥 $A'-BCD$ 四个侧面是全等的，

故三棱锥 $A'-BCD$ 的表面积为 $4S_{\triangle A'BD}=4S_{\triangle ABD}=4\times\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=6\sqrt{3}$，

设内切球半径为 r，以内切球球心为顶点，把三棱锥分割为以球心为顶点，四个面为底面的四个小三棱锥，四个小三棱锥体积等于大三棱锥的体积，

故 $\frac{1}{3}\times6\sqrt{3}r=\sqrt{2}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

故内切球表面积为 $4\pi r^2=\frac{2\pi}{3}$.

16. 已知数表如图，记第 m 行，第 n 列的数为 $a_{(m,n)}$，如 $a_{(4,2)}=8$，记 $M=a_{(2023,1)}+a_{(2023,2)}+\cdots+a_{(2023,2023)}$，则 $\log_2\left(\dfrac{M}{2023}-1010\right)=$ __2022__.

$$
\begin{array}{c}
0 \\
1 \quad 2 \\
3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \\
15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad \cdots \quad \cdots 30 \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

【解析】$\{S_n\}$ 表示前 n 项出现的数字个数总和，即第 $n+1$ 行的第 1 个数字，

$S_n=2^0+2^1+\cdots+2^{n+1}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

如 $S_3=2^0+2^1+2^2=1+2+4=7$，

$$
\begin{cases}
a_{(2023,1)}=S_{2022}=2^{2022}-1, \\
a_{(2023,2)}=2^{2022}+0, \\
a_{(2023,3)}=2^{2022}+1, \\
a_{(2023,2023)}=2^{2022}+2021,
\end{cases}
$$

首项为 $2^{2022}-1$，公差为 1 的等差数列.

$M=2023\times 2^{2022}+[(-1)+2021]\times\dfrac{2023}{2}=2023\times 2^{2022}+\dfrac{2020\times 2023}{2}$.

$\therefore \log_2\left(\dfrac{M}{2023}-1010\right)=\log_2 2^{2022}=2022$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=4$，$2a_4-a_5=7$，公比不为 -1 的等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_3=4$，$b_4+b_5=8(b_1+b_2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n=\dfrac{3}{a_na_{n+1}}+b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_2=4$，$2a_4-a_5=7$，

所以 $2(4+2d)-(4+3d)=7$，解得 $d=3$，从而 $a_1=1$，

所以 $a_n=3n-2(n\in\mathbf{N}^*)$；

设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，因为 $b_4+b_5=8(b_1+b_2)$，所以 $\dfrac{b_4+b_5}{b_1+b_2}=q^3=8$，解得 $q=2$，

因为 $b_3=4$，所以 $b_1=\dfrac{4}{2^2}=1$，

所以 $b_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………………………… 5 分

(2) 由上可知：$c_n=\dfrac{3}{(3n-2)(3n+1)}+2^{n-1}$，所以 $c_n=\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}+2^{n-1}$，

所以$S_n=\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)+(1+2+\cdots+2^{n-1})$，

所以 $S_n=\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)+\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-\frac{1}{3n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………………… 10 分

18.(本小题满分 12 分)

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C对应的边分别为a,b,c，$\triangle ABC$的面积为$\frac{a^2-3b^2}{4}\sin C$.

(1)求证：$\sin A=3\sin B$；

(2)点D在边BC上，若$DC=DA=\frac{1}{3}BC$，求$\cos A$.

【解析】(1)证明：由题意得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2-3b^2}{4}\sin C$，

$\therefore 2ab=a^2-3b^2$，即$(a-3b)(a+b)=0$，

在$\triangle ABC$中，$a+b\neq0$，

$\therefore a-3b=0$，即 $\sin A=3\sin B$. ………………………………………………………………… 5 分

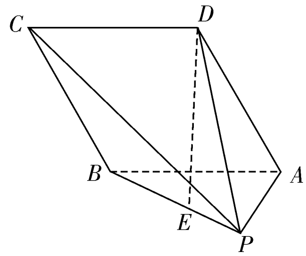
(2)由(1)得 $a=3b$，则 $DC=DA=\frac{1}{3}BC=b=AC$，

$\therefore\triangle ADC$是等边三角形，即$\angle CAD=\angle C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore\sin A=3\sin\left(\frac{\pi}{3}+A\right)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$，则 $\tan A=-3\sqrt{3}$，

$\therefore\cos A=-\frac{\sqrt{7}}{14}$. ………………………………………………………………… 12 分

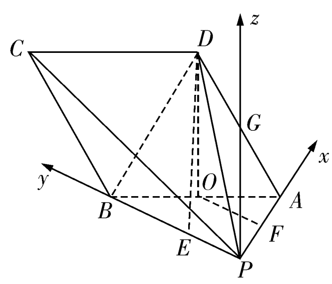
19.(本小题满分 12 分)



如图，在四棱锥P-$ABCD$中，底面$ABCD$是边长为 4 的菱形，$\angle PAB=\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，$PA\perp PB$，点$E$在线段$PB$上，$CD\perp DE$，平面$PAB\perp$平面$ABCD$.

(1)求四面体E-PAD的体积；

(2)求直线DE与平面CDP所成角的正弦值.



【解析】(1)取AB的中点O，连接BD，DO，过点P作DO的平行线PG，

在菱形$ABCD$中，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\triangle ABD$为等边三角形，

又底面$ABCD$是边长为 4 的菱形，$\therefore OD=2\sqrt{3}$，且$DO\perp AB$，

又平面$PAB\perp$平面$ABCD$，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，$DO\subset$平面$ABCD$，

$\therefore DO\perp$平面PAB，又$DO/\!/PG$，$\therefore PG\perp$平面PAB，

又PA，$PB\subset$平面PAB，$\therefore PA\perp PG$，$PB\perp PG$，又$PA\perp PB$，

$\therefore$建立如图所示的空间直角坐标系，

$\because\angle PAB=\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，$\therefore PA=2$，$PB=2\sqrt{3}$，

取 PA 的中点 F，连接 OF，则 $OF=\sqrt{3}$，$AF=1$，

$\therefore P(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$，$O(1,\sqrt{3},0)$，$D(1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-2,2\sqrt{3},0)$，设 $C(a,b,c)$，则 $\overrightarrow{DC}=(a-1,b-\sqrt{3},c-2\sqrt{3})$，

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，得 $a=-1$，$b=3\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{3}$，

即 $C(-1,3\sqrt{3},2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(2,-2\sqrt{3},0)$，

设 $PE=d$，则 $E(0,d,0)$，$\therefore \overrightarrow{DE}=(-1,d-\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，

$\because \overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{DE}$，$\therefore \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DE}=-2+(d-\sqrt{3})(-2\sqrt{3})=0$，$\therefore d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore PE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore V_{E\text{-}PAD}=V_{D\text{-}PAE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times2\times2\sqrt{3}=\frac{4}{3}$. …………………………………… 6 分

(2)设平面 CDP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\overrightarrow{PD}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(2,-2\sqrt{3},0)$，

得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=2x-2\sqrt{3}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-1)$，

又 $\overrightarrow{DE}=\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},-2\sqrt{3}\right)$，

$\therefore$ 直线 DE 与平面 CDP 所成角的正弦值为：

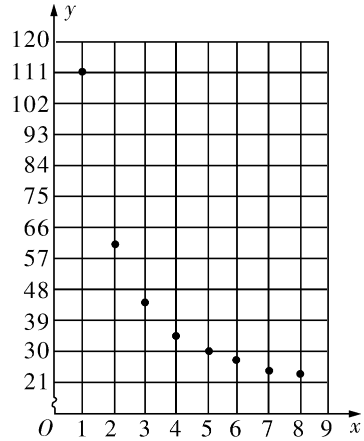
$|\cos\langle\overrightarrow{DE},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DE}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{40}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$. …………………………………… 12 分

20.(本小题满分 12 分)

某企业新研发了一种产品，产品的成本由原料成本及非原料成本组成. 每件产品的非原料成本 y(单位：元)与生产该产品的数量 x(单位：千件)有关，经统计得到如下数据：

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	112	61	44.5	35	30.5	28	25	24

根据以上数据，绘制了散点图.



观察散点图，两个变量不具有线性相关关系，现考虑用反比例函数模型 $y=a+\frac{b}{x}$ 和指数函数模型 $y=ce^{dx}$ 分别对两个变量的关系进行拟合. 已求得用指数函数模型拟合的经验回归方程为 $\hat{y}=96.54e^{-0.2x}$，$\ln y$ 与 x 的相关系数 $r_1=-0.94$.

参考数据(其中 $u_i=\frac{1}{x_i}$)：

$\sum_{i=1}^{8} u_i y_i$	$\overline{u}$	$\overline{u}^2$	$\sum_{i=1}^{8} u_i^2$	$\sum_{i=1}^{8} y_i$	$\sum_{i=1}^{8} y_i^2$	$\sqrt{0.61 \times 6185.5}$	e^{-2}
183.4	0.34	0.115	1.53	360	22385.5	61.4	0.135

(1) 用反比例函数模型求 y 关于 x 的经验回归方程；

(2) 用相关系数判断上述两个模型哪一个拟合效果更好(精确到0.01)，并用其估计产量为10千件时每件产品的非原料成本；

(3) 该企业采取订单生产模式(根据订单数量进行生产，即产品全部售出). 根据市场调研数据，若该产品单价定为100元，则签订9千件订单的概率为0.8，签订10千件订单的概率为0.2；若单价定为90元，则签订10千件订单的概率为0.3，签订11千件订单的概率为0.7. 已知每件产品的原料成本为10元，根据(2)的结果，企业要想获得更高利润，产品单价应选择100元还是90元，请说明理由.

参考公式：对于一组数据(u_1, v_1)，(u_2, v_2)，…，(u_n, v_n)，其经验回归直线 $\hat{v} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - n\overline{u}\,\overline{v}}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n\overline{u}^2}$，$\hat{\alpha} = \overline{v} - \hat{\beta}\,\overline{u}$，相关系数 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - n\overline{u}\,\overline{v}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n\overline{u}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - n\overline{v}^2\right)}}$.

【解析】(1) 令 $u = \dfrac{1}{x}$，则 $y = a + \dfrac{b}{x}$ 可转化为 $y = a + bu$，

因为 $\overline{y} = \dfrac{360}{8} = 45$，

所以 $\hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} u_i y_i - 8\overline{u}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{8} u_i^2 - 8\overline{u}^2} = \dfrac{183.4 - 8 \times 0.34 \times 45}{1.53 - 8 \times 0.115} = \dfrac{61}{0.61} = 100$，

则 $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\,\overline{u} = 45 - 100 \times 0.34 = 11$，

所以 $\hat{y} = 11 + 100u$，所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 11 + \dfrac{100}{x}$. ………………………… 3分

(2) y 与 $\dfrac{1}{x}$ 的相关系数为：$r_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} u_i y_i - 8\overline{u}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{8} u_i^2 - 8\overline{u}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{8} y_i^2 - 8\overline{y}^2\right)}} = \dfrac{61}{\sqrt{0.61 \times 6185.5}} = \dfrac{61}{61.4} \approx 0.99$，

因为 $|r_1| < |r_2|$，所以用反比例函数模型拟合效果更好，

当 $x = 10$ 时，$y = \dfrac{100}{10} + 11 = 21$(元)，

所以当产量为10千件时，每件产品的非原料成本为21元. ………………………………………… 6分

(3)(ⅰ)若产品单价为 100 元，记企业利润为 X(千元)，

订单为 9 千件时，每件产品的成本为$\left(\frac{100}{9}+21\right)$元，企业的利润为 611(千元)，订单为 10 千件时，每件产品的成本为 31 元，企业的利润为 690(千元)，

企业利润 X(千元)的分布列为：

X	611	690
P	0.8	0.2

所以 $E(X)=611\times0.8+690\times0.2=626.8$(千元)；

(ⅱ)若产品单价为 90 元，记企业利润为 Y(千元)，

订单为 10 千件时，每件产品的成本为 31 元，企业的利润为 590(千元)，订单为 11 千件时，每件产品的成本为$\left(\frac{100}{11}+21\right)$元，企业的利润为 659(千元)，

企业利润 Y(千元)的分布列为：

Y	590	659
P	0.3	0.7

所以 $E(Y)=590\times0.3+659\times0.7=638.3$(千元)，

故企业要想获得更高利润，产品单价应选择 90 元. …………………………………………………… 12 分

21.(本小题满分 12 分)

已知 $P(2,0)$是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点，过点 $D(1,0)$且斜率为 $k(k<0)$的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点(点 A 在 x 轴的上方)，直线 PA,PB 分别与直线 $x=1$ 相交于 M,N 两点. 当点 A 为椭圆 C 的上顶点时，$k=-1$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若$|MN|=\lambda$，且 $\lambda\in[2,3]$，求实数 k 的取值范围.

【解析】(1)由题意可知，$a=2$，当点 A 为椭圆 C 的上顶点时，$k=\frac{b-0}{0-1}=-1$，解得 $b=1$.

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)依题意，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k<0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，易得 $x_1<x_2$.

联立方程组$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消去 y 并整理得$(1+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-1)=0$，

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4(k^2-1)}{1+4k^2}$.

直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=1$ 得 $y_M=-\frac{y_1}{x_1-2}$，同理可得 $y_N=-\frac{y_2}{x_2-2}$，

则$|MN|=y_M-y_N=\frac{y_2}{x_2-2}-\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{y_2(x_1-2)-y_1(x_2-2)}{(x_2-2)(x_1-2)}=\frac{k(x_1-x_2)}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$$=\frac{-k\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{-k\sqrt{\left(\frac{8k^2}{1+4k^2}\right)^2-4\frac{4(k^2-1)}{1+4k^2}}}{\frac{4(k^2-1)}{1+4k^2}-2\frac{8k^2}{1+4k^2}+4}=-\frac{\sqrt{3k^2+1}}{k},$$

由 $2\leqslant-\frac{\sqrt{3k^2+1}}{k}\leqslant3$，解得 $\frac{1}{6}\leqslant k^2\leqslant1(k<0)$，得 $-1\leqslant k\leqslant-\frac{\sqrt{6}}{6}$，

即实数 k 的取值范围为 $\left[-1,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$. ………………………………………………………… 12 分

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=(2-x)e^x-ax-2$.

(1)若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围；

(2)当 $0\leqslant a<1$ 时，求证：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点 x_0，且 $x_0<\frac{e}{a+1}$.

【解析】(1)因为 $f(x)=(2-x)e^x-ax-2$，所以 $f'(x)=(1-x)e^x-a$.

由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，得 $f'(x)\leqslant0$，即 $(1-x)e^x-a\leqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立.

令 $g(x)=(1-x)e^x-a$，则 $g'(x)=-xe^x$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

故 $g(x)_{\max}=g(0)=1-a\leqslant0$，解得 $a\geqslant1$，即实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. …………………… 5 分

(2)由(1)可知，$f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f'(0)=1-a>0$，$f'(1)=-a\leqslant0$，

故 $\exists x_1\in(0,1]$，$f'(x_1)=0$.

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

因为 $f(0)=0$，$f(2)=-2a-2<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上只有一个零点 x_0，

故 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点 x_0.

因为 $0<x_0<2$，所以要证 $x_0<\frac{e}{a+1}$，需证 $ax_0+x_0-e<0$，需证 $ax_0+2-e\leqslant0$.

因为 $f(x_0)=(2-x_0)e^{x_0}-ax_0-2=0$，所以需证 $(2-x_0)e^{x_0}-e\leqslant0$.

令 $h(x)=(2-x)e^x-e$，$0<x<2$，则 $h'(x)=(1-x)e^x$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

故 $h(x)_{\max}=h(1)=0$，从而 $(2-x_0)e^{x_0}-e\leqslant0$，

所以，$x_0<\frac{e}{a+1}$，证毕. ………………………………………………………………………… 12 分