

数学（理科）

2019.4

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$ ， $B = \{-3, -1, 1, 3\}$ ，则集合 $(\complement_U A) \cap B =$

(A) $\{-3, -1\}$

(B) $\{-3, -1, 3\}$

(C) $\{1, 3\}$

(D) $\{-1, 1\}$

2. 若复数 $z = \frac{1-i}{2-i}$ ，则在复平面内 z 对应的点位于

(A) 第一象限

(B) 第二象限

(C) 第三象限

(D) 第四象限

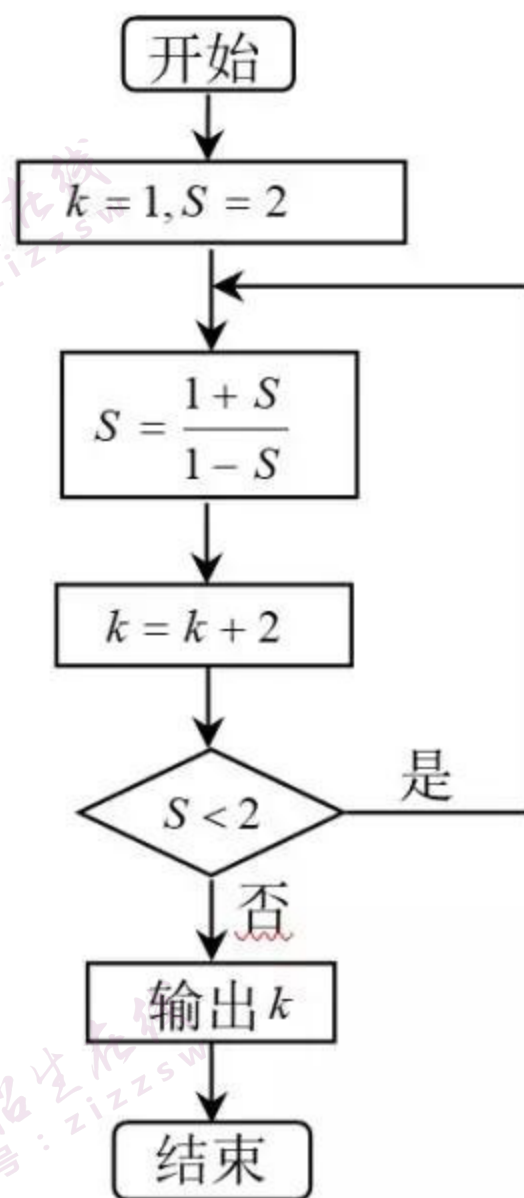
3. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 k 值为

(A) 4

(B) 5

(C) 7

(D) 9



4. 下列直线中, 与曲线 $C: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 4t \end{cases}$ (t 为参数) 没有公共点的是

(A) $2x + y = 0$

(B) $2x + y - 4 = 0$

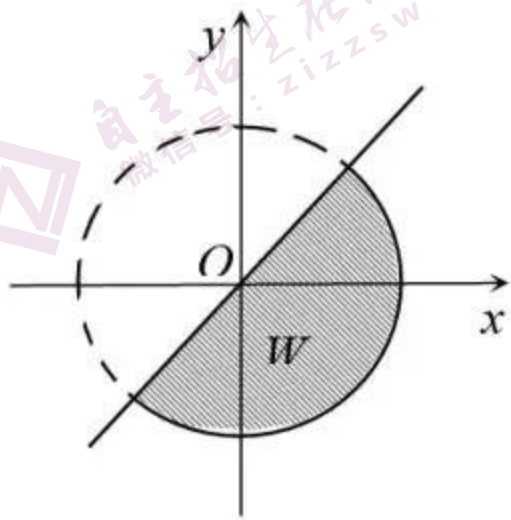
(C) $2x - y = 0$

(D) $2x - y - 4 = 0$

5. 设 a, b, m 均为正数, 则 “ $b > a$ ” 是 “ $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$ ” 的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 如图, 阴影表示的平面区域 W 是由曲线 $x - y = 0$, $x^2 + y^2 = 2$ 所围成的. 若点 $P(x, y)$ 在 W 内 (含边界), 则 $z = 4x + 3y$ 的最大值和最小值分别为

- (A) $5\sqrt{2}$, -7
(B) $5\sqrt{2}$, $-5\sqrt{2}$
(C) 7 , $-5\sqrt{2}$
(D) 7 , -7



7. 团体购买公园门票，票价如下表：

| | | | |
|------|--------|--------|--------|
| 购票人数 | 1~50 | 51~100 | 100 以上 |
| 门票价格 | 13 元/人 | 11 元/人 | 9 元/人 |

现某单位要组织其市场部和生产部的员工游览该公园，若按部门作为团体，选择两个不同的时间分别购票游览公园，则共需支付门票费为 1290 元；若两个部门合在一起作为一个团体，同一时间购票游览公园，则需支付门票费为 990 元，那么这两个部门的人数之差为

(A) 20

(B) 30

(C) 35

(D) 40

8. 如果把一个平面区域内两点间的距离的最大值称为此区域的直径，那么曲线 $x^4 + y^2 = 2$ 围成的平面区域的直径为

(A) $\sqrt[4]{32}$

(B) 3

(C) $2\sqrt{2}$

(D) 4

第II卷 (非选择题 共110分)

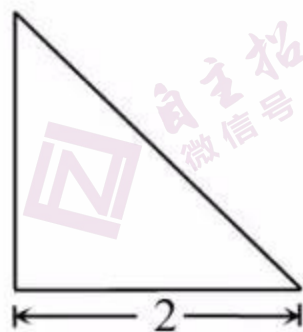
二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=1$, $a_5=8$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

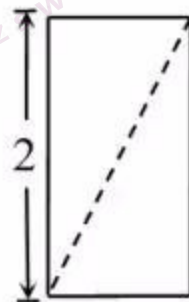
10. 设 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点, 若双曲线 C 的两个顶点恰好将线段 F_1F_2 三等分, 则双曲线 C 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 函数 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$ 的最小正周期 $T = \underline{\hspace{2cm}}$; 如果对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \leq a$, 那么实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

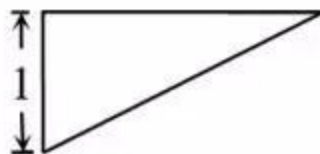
12. 某四棱锥的三视图如图所示, 那么此四棱锥的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



正(主)视图



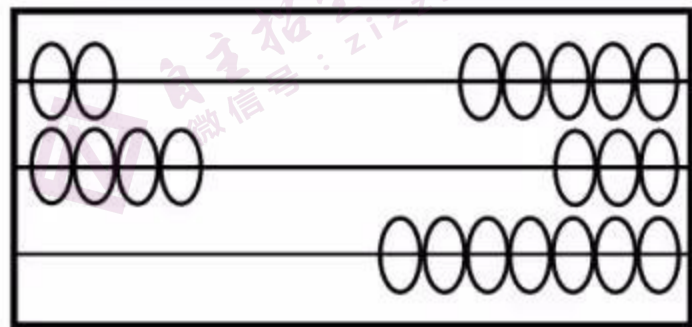
侧(左)视图



俯视图

13. 能说明“若 $\sin\alpha = \cos\beta$, 则 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 90^\circ$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$ ”为假命题的一组 α , β 的值是_____.

14. 如图所示, 玩具计数算盘的三档上各有 7 个算珠, 现将每档算珠分为左右两部分, 左侧的每个算珠表示数 2, 右侧的每个算珠表示数 1 (允许一侧无珠), 记上、中、下三档的数字和分别为 a , b , c . 例如, 图中上档的数字和 $a=9$. 若 a , b , c 成等差数列, 则不同的分珠计数法有_____种.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a^2 + c^2 - b^2 = mac$ ，其中 $m \in \mathbf{R}$ 。

(I) 判断 m 能否等于 3，并说明理由；

(II) 若 $m = -1$ ， $b = 2\sqrt{7}$ ， $c = 4$ ，求 $\sin A$ 。

16. (本小题满分 14 分)

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，梯形 $ADEF$ 与平行四边形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，

$AF \parallel DE$ ， $DE \perp AD$ ， $AD \perp BE$ ， $AF = AD = \frac{1}{2}DE = 1$ ， $AB = \sqrt{2}$ 。

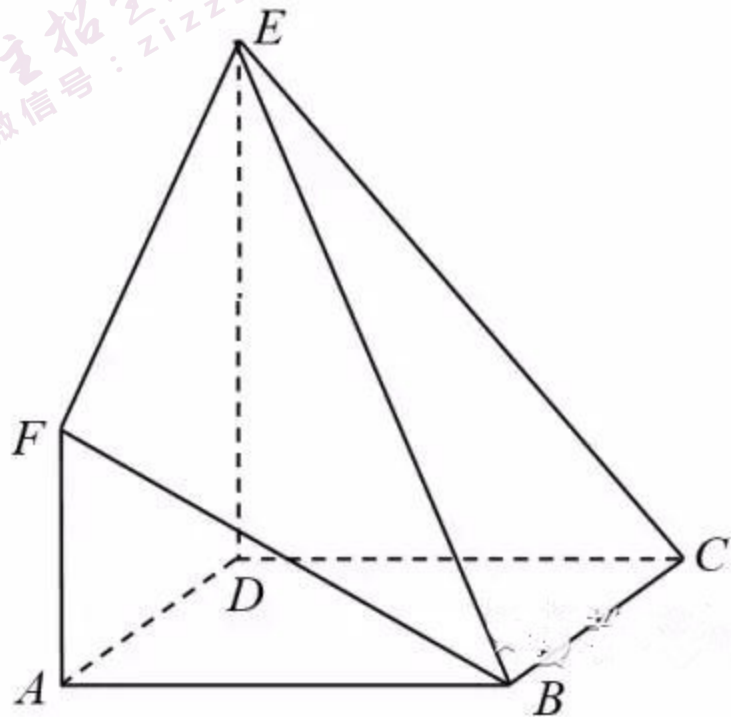
(I) 求证： $BF \parallel$ 平面 CDE ；

(II) 求二面角 $B-EF-D$ 的余弦值；

(III) 判断线段 BE 上是否存在点 Q ，使得

平面 $CDQ \perp$ 平面 BEF ？若存在，求

出 $\frac{BQ}{BE}$ 的值，若不存在，说明理由。



17. (本小题满分 13 分)

为培养学生的阅读习惯，某校开展了为期一年的“弘扬传统文化，阅读经典名著”活动. 活动结束后，为了解阅读情况，学校统计了甲、乙两组各 10 名学生的阅读量（单位：本），统计结果用茎叶图记录如下，乙组记录中有一个数据模糊，无法确认，在图中以 a 表示.

| 甲 | | 乙 |
|-----------|---|-------------|
| 8 6 2 1 | 0 | 1 2 4 4 |
| 7 2 2 1 0 | 1 | 2 3 6 6 a |
| | 2 | 0 |

- (I) 若甲组阅读量的平均值大于乙组阅读量的平均值，求图中 a 的所有可能取值；
- (II) 将甲、乙两组中阅读量超过 15 本的学生称为“阅读达人”. 设 $a=3$ ，现从所有“阅读达人”里任取 3 人，求其中乙组的人数 X 的分布列和数学期望.
- (III) 记甲组阅读量的方差为 s_0^2 . 在甲组中增加一名学生 A 得到新的甲组，若 A 的读量为 10，则记新甲组阅读量的方差为 s_1^2 ；若 A 的读量为 20，则记新甲组阅读量的方差为 s_2^2 ，试比较 s_0^2 ， s_1^2 ， s_2^2 的大小. (结论不要求证明)

18. (本小题满分 13 分)

设函数 $f(x) = me^x - x^2 + 3$, 其中 $m \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $f(x)$ 为偶函数时, 求函数 $h(x) = xf(x)$ 的极值;

(II) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点, 求 m 的取值范围.

19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $W: \frac{x^2}{4m} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的长轴长为 4, 左、右顶点分别为 A, B , 经过点 $P(n, 0)$ 的直线

与椭圆 W 相交于不同的两点 C, D (不与点 A, B 重合).

(I) 当 $n = 0$, 且直线 $CD \perp x$ 轴时, 求四边形 $ACBD$ 的面积;

(II) 设 $n = 1$, 直线 CB 与直线 $x = 4$ 相交于点 M , 求证: A, D, M 三点共线.

20. (本小题满分 13 分)

如图, 设 A 是由 $n \times n$ ($n \geq 2$) 个实数组成的 n 行 n 列的数表, 其中 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 表示位于第 i 行第 j 列的实数, 且 $a_{ij} \in \{1, -1\}$.

| | | | |
|----------|----------|---------|----------|
| a_{11} | a_{12} | \dots | a_{1n} |
| a_{21} | a_{22} | \dots | a_{2n} |
| \vdots | \vdots | \dots | \vdots |
| a_{n1} | a_{n2} | \dots | a_{nn} |

定义 $p_{st} = a_{s1}a_{t1} + a_{s2}a_{t2} + \dots + a_{sn}a_{tn}$ ($s, t = 1, 2, \dots, n$) 为第 s 行与第 t 行的积. 若对于任意 s, t ($s \neq t$), 都有 $p_{st} = 0$, 则称数表 A 为完美数表.

(I) 当 $n = 2$ 时, 试写出一个符合条件的完美数表;

(II) 证明: 不存在 10 行 10 列的完美数表;

(III) 设 A 为 n 行 n 列的完美数表, 且对于任意的 $i = 1, 2, \dots, l$ 和 $j = 1, 2, \dots, k$, 都有 $a_{ij} = 1$, 证明: $kl \leq n$.

北京市西城区高三统一测试

数学（理科）参考答案及评分标准

2019.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. B | 2. D | 3. D | 4. C |
| 5. C | 6. A | 7. B | 8. B |

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

- | | | |
|----------------------------|--|----------------------------|
| 9. $2^{n-1} - \frac{1}{2}$ | 10. 3 | 11. $\pi; a \geq \sqrt{2}$ |
| 12. $\frac{4}{3}$ | 13. 答案不唯一，如 $\alpha = 110^\circ, \beta = 20^\circ$ | 14. 32 |

注：第 11 题第一问 3 分，第二问 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。其他正确解答过程，请参照评分标准给分。

15. (本小题满分 13 分)

解：(I) 当 $m=3$ 时，由题可知 $a^2+c^2-b^2=3ac$ ，

由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，

$$\text{得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3}{2}.$$

这与 $\cos B \in [-1, 1]$ 矛盾，

所以 m 不可能等于 3.

(II) 由 (I)，得 $\cos B = \frac{m}{2} = -\frac{1}{2}$ ，所以 $B = \frac{2\pi}{3}$.

因为 $b=2\sqrt{7}$ ， $c=4$ ， $a^2+c^2-b^2=-ac$ ，

所以 $a^2+16-28=-4a$ ，

解得 $a=-6$ (舍) 或 $a=2$ 。

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

$$\text{得 } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{2}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

..... 3 分

..... 4 分

..... 6 分

..... 7 分

..... 9 分

..... 11 分

..... 13 分

16. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由底面 $ABCD$ 为平行四边形, 知 $AB \parallel CD$,

又因为 $AB \not\subset$ 平面 CDE , $CD \subset$ 平面 CDE ,

所以 $AB \parallel$ 平面 CDE .

同理 $AF \parallel$ 平面 CDE ,

又因为 $AB \cap AF = A$,

所以平面 $ABF \parallel$ 平面 CDE .

又因为 $BF \subset$ 平面 ABF ,

所以 $BF \parallel$ 平面 CDE .

..... 2 分

..... 3 分

..... 4 分

(II) 连接 BD ,

因为平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $DE \perp AD$,

所以 $DE \perp$ 平面 $ABCD$. 则 $DE \perp DB$.

又因为 $DE \perp AD$, $AD \perp BE$, $DE \cap BE = E$,

所以 $AD \perp$ 平面 BDE , 则 $AD \perp BD$.

故 DA, DB, DE 两两垂直, 所以以 DA, DB, DE 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴和 z 轴,

如图建立空间直角坐标系,

..... 6 分

则 $D(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(-1,1,0)$, $E(0,0,2)$, $F(1,0,1)$,

所以 $\overrightarrow{BE} = (0, -1, 2)$, $\overrightarrow{EF} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ 为平面 DEF 的一个法向量.

设平面 BEF 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

由 $\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$, $\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, 得
$$\begin{cases} -y + 2z = 0, \\ x - z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 得 $\mathbf{m} = (1, 2, 1)$8分

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

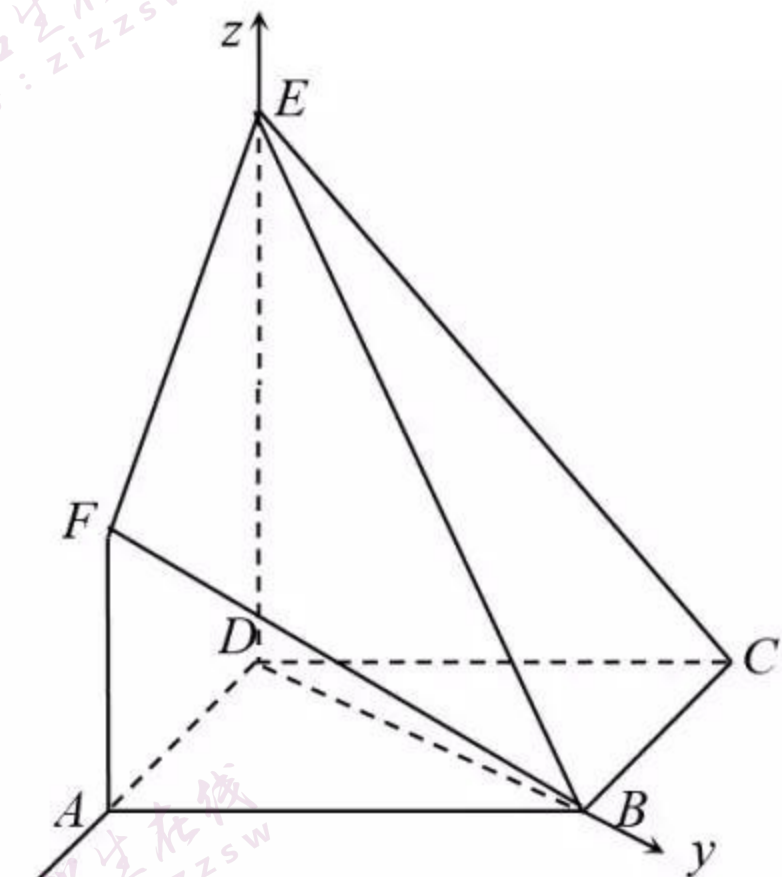
如图可得二面角 $B - EF - D$ 为锐角,

所以二面角 $B - EF - D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$10分

(III) 结论: 线段 BE 上存在点 Q , 使得平面 $CDQ \perp$ 平面 BEF11分

证明如下:

设 $\overrightarrow{BQ} = \lambda \overrightarrow{BE} = (0, -\lambda, 2\lambda)$ ($\lambda \in [0, 1]$),



所以 $\overline{DQ} = \overline{DB} + \overline{BQ} = (0, 1 - \lambda, 2\lambda)$.

设平面 CDQ 的法向量为 $\mathbf{u} = (a, b, c)$, 又因为 $\overline{DC} = (-1, 1, 0)$,

所以 $\mathbf{u} \cdot \overline{DQ} = 0$, $\mathbf{u} \cdot \overline{DC} = 0$, 即
$$\begin{cases} (1 - \lambda)b + 2\lambda c = 0, \\ -a + b = 0, \end{cases} \dots\dots 12 \text{ 分}$$

若平面 $CDQ \perp$ 平面 BEF , 则 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{u} = 0$, 即 $a + 2b + c = 0$, $\dots\dots 13 \text{ 分}$

解得 $\lambda = \frac{1}{7} \in [0, 1]$.

所以线段 BE 上存在点 Q , 使得平面 $CDQ \perp$ 平面 BEF , 且此时 $\frac{BQ}{BE} = \frac{1}{7}$. $\dots\dots 14 \text{ 分}$

17. (本小题满分 13 分)

解: (I) 甲组 10 名学生阅读量的平均值为 $\frac{1+2+6+8+10+11+12+12+17+21}{10} = 10$,

乙组 10 名学生阅读量的平均值为 $\frac{1+2+4+4+12+13+16+16+(10+a)+20}{10} = \frac{98+a}{10}$.

$\dots\dots 2 \text{ 分}$

由题意, 得 $10 > \frac{98+a}{10}$, 即 $a < 2$. $\dots\dots 3 \text{ 分}$

故图中 a 的取值为 0 或 1. $\dots\dots 4 \text{ 分}$

17. (本小题满分 13 分)

解: (I) 甲组 10 名学生阅读量的平均值为 $\frac{1+2+6+8+10+11+12+12+17+21}{10} = 10$,

乙组 10 名学生阅读量的平均值为 $\frac{1+2+4+4+12+13+16+16+(10+a)+20}{10} = \frac{98+a}{10}$.

..... 2 分

由题意, 得 $10 > \frac{98+a}{10}$, 即 $a < 2$.

..... 3 分

故图中 a 的取值为 0 或 1.

..... 4 分

(II) 由图可知, 甲组“阅读达人”有 2 人, 乙组“阅读达人”有 3 人.

由题意, 随机变量 X 的所有可能取值为: 1, 2, 3.

..... 5 分

且 $P(X=1) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$, $P(X=2) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}$, $P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$

8 分

所以随机变量 X 的分布列为:

| | | | |
|-----|----------------|---------------|----------------|
| X | 1 | 2 | 3 |
| P | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

..... 9 分

所以 $E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}$.

..... 10 分

(III) $s_1^2 < s_0^2 < s_2^2$.

..... 13 分

18. (本小题满分 13 分)

解: (I) 由函数 $f(x)$ 是偶函数, 得 $f(-x) = f(x)$,

即 $me^{-x} - (-x)^2 + 3 = me^x - x^2 + 3$ 对于任意实数 x 都成立,

所以 $m = 0$.

..... 2 分

此时 $h(x) = xf(x) = -x^3 + 3x$, 则 $h'(x) = -3x^2 + 3$.

由 $h'(x) = 0$, 解得 $x = \pm 1$.

..... 3 分

当 x 变化时, $h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示:

| | | | | | |
|---------|-----------------|------|------------|-----|----------------|
| x | $(-\infty, -1)$ | -1 | $(-1, 1)$ | 1 | $(1, +\infty)$ |
| $h'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $h(x)$ | \searrow | 极小值 | \nearrow | 极大值 | \searrow |

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1, 1)$ 上单调递增.

..... 5 分

所以 $h(x)$ 有极小值 $h(-1) = -2$, $h(x)$ 有极大值 $h(1) = 2$.

..... 6 分

(II) 由 $f(x) = me^x - x^2 + 3 = 0$, 得 $m = \frac{x^2 - 3}{e^x}$.

所以 “ $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点” 等价于 “直线 $y = m$ 与曲线 $g(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$,

$x \in [-2, 4]$ 有且只有两个公共点”.

..... 8 分

对函数 $g(x)$ 求导, 得 $g'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x}$.

..... 教师汇

由 $g'(x) = 0$ ，解得 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$ 。

..... 10 分

当 x 变化时， $g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表所示：

| | | | | | |
|---------|------------|------|------------|-----|------------|
| x | $(-2, -1)$ | -1 | $(-1, 3)$ | 3 | $(3, 4)$ |
| $g'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $g(x)$ | \searrow | 极小值 | \nearrow | 极大值 | \searrow |

所以 $g(x)$ 在 $(-2, -1)$ ， $(3, 4)$ 上单调递减，在 $(-1, 3)$ 上单调递增。..... 11 分

又因为 $g(-2) = e^2$ ， $g(-1) = -2e$ ， $g(3) = \frac{6}{e^3} < g(-2)$ ， $g(4) = \frac{13}{e^4} > g(-1)$ ，

所以当 $-2e < m < \frac{13}{e^4}$ 或 $m = \frac{6}{e^3}$ 时，直线 $y = m$ 与曲线 $g(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ ， $x \in [-2, 4]$ 有且只有

两个公共点。

即当 $-2e < m < \frac{13}{e^4}$ 或 $m = \frac{6}{e^3}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点。..... 13 分

19. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由题意, 得 $a^2 = 4m = 4$, 解得 $m = 1$.

所以椭圆 W 方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

当 $n = 0$, 及直线 $CD \perp x$ 轴时, 易得 $C(0,1), D(0,-1)$. 且 $A(-2,0), B(2,0)$.

所以 $|AB| = 4, |CD| = 2$,

显然此时四边形 $ACBD$ 为菱形, 所以四边形 $ACBD$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$. …… 5 分

(II) 当直线 CD 的斜率 k 不存在时, 由题意, 得 CD 的方程为 $x = 1$,

代入椭圆 W 的方程, 得 $C(1, \frac{\sqrt{3}}{2}), D(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$,

易得 CB 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2)$.

则 $M(4, -\sqrt{3}), \overline{AM} = (6, -\sqrt{3}), \overline{AD} = (3, -\frac{\sqrt{3}}{2})$,

所以 $\overline{AM} = 2\overline{AD}$, 即 A, D, M 三点共线.

当直线 CD 的斜率 k 存在时, 设 CD 的方程为 $y = k(x - 1) (k \neq 0), C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$,

…………… 2 分

…………… 3 分

…………… 7 分

联立方程 $\begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y , 得 $(4k^2 + 1)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$ 9 分

由题意, 得 $\Delta > 0$ 恒成立, 故 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{4k^2 - 4}{4k^2 + 1}$ 10 分

直线 CB 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$.

令 $x = 4$, 得 $M(4, \frac{2y_1}{x_1 - 2})$ 11 分

又因为 $A(-2, 0)$, $D(x_2, y_2)$,

则直线 AD , AM 的斜率分别为 $k_{AD} = \frac{y_2}{x_2 + 2}$, $k_{AM} = \frac{y_1}{3(x_1 - 2)}$, 12 分

所以 $k_{AD} - k_{AM} = \frac{y_2}{x_2 + 2} - \frac{y_1}{3(x_1 - 2)} = \frac{3y_2(x_1 - 2) - y_1(x_2 + 2)}{3(x_1 - 2)(x_2 + 2)}$.

上式中的分子 $3y_2(x_1 - 2) - y_1(x_2 + 2) = 3k(x_2 - 1)(x_1 - 2) - k(x_1 - 1)(x_2 + 2)$

$$= 2kx_1x_2 - 5k(x_1 + x_2) + 8k$$

$$= 2k \times \frac{4k^2 - 4}{4k^2 + 1} - 5k \times \frac{8k^2}{4k^2 + 1} + 8k$$

$$= 0,$$

所以 $k_{AD} - k_{AM} = 0$.

所以 A, D, M 三点共线.

..... 14 分

20. (本小题满分 13 分)

解: (I) 答案不唯一. 如:

| | |
|----|---|
| 1 | 1 |
| -1 | 1 |

..... 3 分

(II) 假设存在 10 行 10 列的完美数表 A .

根据完美数表的定义, 可以得到以下两个结论:

(1) 把完美数表的任何一列的数变为其相反数 (即 +1 均变为 -1, 而 -1 均变为 +1), 得到的新数表是完美数表;

(2) 交换完美数表的任意两列, 得到的新数表也是完美数表. 5分

完美数表 A 反复经过上述两个结论的变换, 前三行可以为如下形式:

| | | | | | | | | | | | |
|---|-----|---|----|-----|----|----|-----|----|----|-----|----|
| 1 | ... | 1 | 1 | ... | 1 | 1 | ... | 1 | 1 | ... | 1 |
| 1 | ... | 1 | 1 | ... | 1 | -1 | ... | -1 | -1 | ... | -1 |
| 1 | ... | 1 | -1 | ... | -1 | 1 | ... | 1 | -1 | ... | -1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

共 x 列 共 y 列 共 z 列 共 w 列

在这个新数表中, 设前三行中的数均为 1 的有 x 列, 前三行中“第 1, 2 行中的数为 1, 且第 3 行中的数为 -1”的有 y 列, 前三行中“第 1, 3 行中的数为 1, 且第 2 行中的数为 -1”的有 z 列, 前三行中“第 1 行中的数为 1, 且第 2, 3 行中的数为 -1”的有 w 列(如上表所示),

则 $x + y + z + w = 10$ ①

由 $p_{12} = 0$ ，得 $x + y = z + w$ ； ②

由 $p_{13} = 0$ ，得 $x + z = y + w$ ； ③

由 $p_{23} = 0$ ，得 $x + w = y + z$ 。 ④

解方程组 ①，②，③，④，得 $x = y = z = w = \frac{5}{2}$ 。

这与 $x, y, z, w \in \mathbf{N}$ 矛盾，

所以不存在 10 行 10 列的完美数表。

..... 8 分

(III) 记第 1 列前 l 行中的数的和 $a_{11} + a_{21} + \dots + a_{l1} = X_1$ ，第 2 列前 l 行中的数的和

$a_{12} + a_{22} + \dots + a_{l2} = X_2$ ，.....，第 n 列前 l 行中的数的和 $a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{ln} = X_n$ ，

因为对于任意的 $i = 1, 2, \dots, l$ 和 $j = 1, 2, \dots, k$ ，都有 $a_{ij} = 1$ ，

所以 $X_1 = X_2 = \dots = X_k = l$ 。

..... 9 分

又因为对于任意 s, t ($s \neq t$)，都有 $p_{st} = 0$ ，

所以 $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = ln$ 。

..... 11 分

又因为 $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \geq X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2 = l^2 k$ ，

所以 $ln \geq l^2 k$ ，即 $kl \leq n$ 。

..... 13 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注