



大联考长沙市一中 2024 届高三月考试卷(一)

数 学

时量:120 分钟 满分:150 分

得分_____

一、选择题(本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设非空集合 P, Q 满足 $P \subseteq Q$, 则下列表述正确的是

- A. $\forall x \in Q$, 有 $x \in P$ B. $\forall x \in P$, 有 $x \in Q$
C. $\exists x \notin Q$, 使得 $x \in P$ D. $\exists x \in P$, 使得 $x \notin Q$

2. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{10} = 20, S_{20} = 10$, 则 $S_{30} =$

- A. 5 B. 15 C. 25 D. 35

3. 已知 $\tan \frac{\theta}{2} = 2$, 则 $\cos \theta =$

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

4. 抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则该双曲线的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. 已知非零向量 a, b , 则下列命题错误的是

- A. $|a \cdot b| \leq |a| |b|$
B. $|a + b| \leq |a| + |b|$
C. 与向量 a 共线的单位向量为 $\frac{a}{|a|}$
D. 记 $\frac{b}{|b|} = e$, 则向量 a 在向量 b 上的投影向量为 $(a \cdot e)e$

6. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 有下列四个命题:

- 甲: $p(X > m) = 0.5$;
乙: $p(X \leq m) = 0.5$;
丙: $p(m-1 < X < m) < p(m+1 < X < m+2)$
丁: $p(X > m+1) > p(X < m-2)$

如果只有一个假命题, 则该命题为

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

号
考
名
姓
不
要
答
题
封
线
密
级
班
校
封

C. 函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

D. 函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的瞬时变化率最大

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$, 且对任意的正整数 m, n , 都有 $a_{2m} + a_{2n} = 2a_{m+n} + |m-n|$, 则下列说法正确的有

A. $a_4 = 5$

B. 数列 $\{a_{2n+2} - a_{2n}\}$ 是等差数列

C. $a_{2n} = 3n - 1$

D. 当 n 为奇数时, $a_n = \frac{n^2 + 3}{4}$

三、填空题(本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知两圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1, C_2: (x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2 (r > 1)$, 若圆 C_1 与圆 C_2 有且仅有两条公切线, 则 r 的取值范围为_____.

14. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $\frac{a_6}{a_5} < -1$, 且数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 有最大值, 则使 $S_n > 0$ 成立的正整数 n 的最大值是_____.

15. 已知函数 $f(x) = e^x - 2ax + a$, 若 $f(x)$ 恰有两个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的图象在 y 轴上的截距为 $\frac{1}{2}$, 且在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上没有最值, 则 ω 的取值范围为_____.

四、解答题(本大题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $c^2 = ab$, CD 为 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的中线, 且 $CD \cdot \sin \angle ACB = a \sin B$.

(1) 求证: $CD = c$;

(2) 求 $\cos \angle ACB$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

设各项均不为零的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, 且对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 满足 $2S_n = a_n \cdot a_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

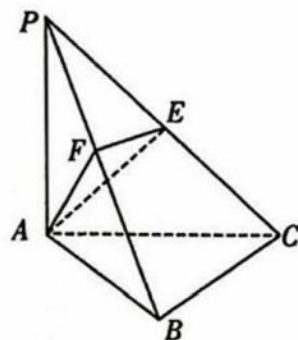
(2) 设 $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 99 项和.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧棱 $PA \perp$ 底面 ABC , 且 $PA=AC$, $AC \perp BC$, 过棱 PC 的中点 E , 作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F , 连接 AE, AF .

(1) 证明: $PB \perp$ 平面 AEF ;

(2) 若 $PA=2$, 三棱锥 $P-AEF$ 的体积是 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 求直线 PC 与平面 AEF 所成角的大小.



20. (本小题满分 12 分)

现有一种射击训练,每次训练都是由高射炮向目标飞行物连续发射三发炮弹,每发炮弹击中目标飞行物与否相互独立. 已知射击训练有 I, II 两种型号的炮弹,对于 I 型号炮弹,每发炮弹击中目标飞行物的概率为 $p(0 < p \leq 0.4)$,且击中一弹目标飞行物坠毁的概率为 0.6,击中两弹目标飞行物必坠毁;对于 II 型号炮弹,每发炮弹击中目标飞行物的概率均为 $q(0 < q < 1)$,且击中一弹目标飞行物坠毁的概率为 0.4,击中两弹目标飞行物坠毁的概率为 0.8,击中三弹目标飞行物必坠毁.

- (1)在一次训练中,使用 II 型号炮弹,求 q 满足什么条件时,才能使得至少有一发炮弹击中目标飞行物的概率不低于 0.936?
- (2)若 $p+q=1$,试判断在一次训练中选用 I 型号炮弹还是 II 型号炮弹使得目标飞行物坠毁的概率更大?

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 左焦点为 F ,点 F 到椭圆 C 上的点的距离最小值是 1,离心率为 $\frac{1}{2}$.

- (1)求椭圆 C 的方程;
- (2)设点 $P(4,0)$, A, B 是椭圆上关于 x 轴对称的两点, PB 交椭圆 C 于另一点 E ,求 $\triangle AEF$ 的内切圆半径的范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{x+a}$, $g(x) = \ln(x+1)$, $a \in \mathbb{Z}$.

(1) 若 $a = -1$, 求证: $f(x) > g(x)$;

(2) 若函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 存在两条公切线, 求整数 a 的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线