高三十月考试
数学参考答案

1. C　因为向量$\overrightarrow{AB}=(12,-2)$与$\overrightarrow{CD}=(a,-6)$垂直，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=12a+12=0$，则$a=-1$.

2. A　因为$M=\{1,9\}$，$N=\{-1,-3,1,3\}$，所以$M\cap N=\{1\}$.

3. D　B与C均为全称量词命题，A与D均为存在量词命题，因为$\forall x\in\mathbf{R}$，$1+\sin x\geqslant 0$，所以A是假命题，存在正整数2，它既是偶数又是质数，故选D.

4. A　因为$5=\log_3 3^5>a=\log_3 82>\log_3 81=4=\log_2 16>b=\log_2 15$，$c=0.2^{-1.1}=5^{1.1}>5$，所以$b<a<c$.

5. D　因为$a^2=b^2$，所以$a=\pm b$，由$a^2+ab=2b^2$，得$(a-b)(a+2b)=0$，得$a=b$或$a=-2b$，所以“$a^2=b^2$”是“$a^2+ab=2b^2$”的既不充分也不必要条件.

6. B　$y'=4t^3+6t-1$，设$f(t)=4t^3+6t-1$，则$f'(t)=12t^2+6$，因为当$t=t_0$时，该质点的瞬时加速度大于$9\ \mathrm{m/s^2}$，所以$f'(t_0)=12t_0^2+6>9$，显然t不是负数，所以$t_0>\frac{1}{2}$.

7. A　因为$f(x+1)$是偶函数，所以$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，因为$f(0)=0$，所以$f(2)=0$. 由$\frac{f(x)}{4x^2-1}<0$，得$\begin{cases}f(x)>0,\\4x^2-1<0\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0,\\4x^2-1>0,\end{cases}$因为当$x\geqslant 1$时，$f(x)$单调递增，所以$\begin{cases}x<0\text{或}x>2,\\-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}0<x<2,\\x<-\frac{1}{2}\text{或}x>\frac{1}{2},\end{cases}$解得$x\in(-\frac{1}{2},0)\cup(\frac{1}{2},2)$.

8. D　由题可知$\frac{T}{2}<\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{3T}{2}$，解得$1<\omega\leqslant 3$，$\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}<\omega x+\frac{\pi}{5}<\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}$.

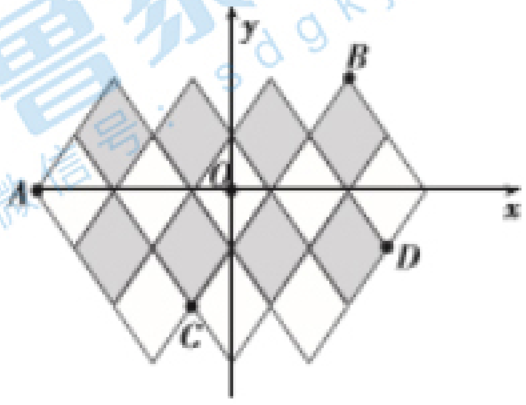
因为函数$f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{5})$在区间$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$上恰有两个零点，所以$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}<\frac{3\pi}{2},\\\frac{5\pi}{2}<\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}\leqslant\frac{7\pi}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}<\frac{5\pi}{2},\\\frac{7\pi}{2}<\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}\leqslant\frac{9\pi}{2},\end{cases}$解得$\frac{23}{15}<\omega\leqslant\frac{11}{5}$或$\frac{13}{5}\leqslant\omega\leqslant\frac{43}{15}$，即$\omega\in(\frac{23}{15},\frac{11}{5}]\cup[\frac{13}{5},\frac{43}{15}]$.

9. BCD　$T=\frac{2\pi}{5}$，A错误. $f(\frac{4\pi}{5})=0$，B正确. $f(-\frac{\pi}{10})=-1$，D正确. 当$x\in(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3})$时，$5x\in(\pi,\frac{5\pi}{3})$，则$f(x)$在$(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3})$上先减后增，C正确.

10. ABD　令$x=y=0$，得$f(0)=[f(0)]^2-2f(0)+2$，因为$f(0)<2$，所以$f(0)=1$. 令$x=y=1$，得$f(1)=[f(1)]^2-2f(1)+2$，因为$f(0)\neq f(1)$，所以$f(1)=2$. 令$x=y=-1$，得$f(1)=[f(-1)]^2-2f(-1)+2$，即$[f(-1)]^2=2f(-1)$，因为$f(x)>0$，所以$f(-1)>0$，所以$f(-1)=2$. 令$y=-1$，得$f(-x)=f(-1)f(x)-f(-1)-f(x)+2$，则$f(-x)=2f(x)-$

$2-f(x)+2$，即 $f(-x)=f(x)$.

11. BC　因为每个小菱形的最小内角为 $60°$，所以每个小菱形都可以分为两个正三角形. 以该图形的对称轴为 y 轴建立平面直角坐标系，如图所示，则 $A(-5,0)$，$B(3,2\sqrt{3})$，$C(-1,-2\sqrt{3})$，$D(4,-\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AB}=(8,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(4,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(9,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-4,-4\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=-36+12=-24$，



$\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{32-12}{64+12}\overrightarrow{AB}=\dfrac{5}{19}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量的模为 $\left|\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right|=\dfrac{36+6}{\sqrt{16+12}}=3\sqrt{7}$，所以 A，D 均错误，B 正确. 因为 $\dfrac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\dfrac{13}{12}\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{56+52}{12},\dfrac{14\sqrt{3}-26\sqrt{3}}{12}\right)=(9,-\sqrt{3})=\overrightarrow{AD}$，所以 C 正确.

12. AC　对于选项 A，令 $f(x)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-\log_{\frac{1}{4}}x$，$f'(x)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\ln\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x\ln\frac{1}{4}}=\dfrac{x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\ln\frac{1}{4}\right)^2-1}{x\ln\frac{1}{4}}$，令 $g(x)=x\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\left(\ln\dfrac{1}{4}\right)^2-1$，$g'(x)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\left(1+x\ln\dfrac{1}{4}\right)\left(\ln\dfrac{1}{4}\right)^2$. 当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{\ln 4}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(\dfrac{1}{\ln 4},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减. 所以 $g(x)\leqslant g\left(\dfrac{1}{\ln 4}\right)=g(\log_4 e)=\dfrac{\log_4 e}{e}\left(\ln\dfrac{1}{4}\right)^2-1<0$，所以 $f(x)$ 单调递增，又 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$，$f(1)>0$，所以 $f(x)$ 有唯一零点，从而 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象只有一个交点.

对于选项 B，$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 是 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象的两个交点，不符合题意.

对于 C，D 选项，$a>1$，因为 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数，所以两个函数的图象都与直线 $y=x$ 相切，设切点为 (m,m)，则 $a^m=m$，$(a^m)'=a^m\ln a=1$，所以 $m\ln a=\ln m$，$m\ln a=1$，所以 $\ln m=1$，解得 $m=e$，$a=e^{\frac{1}{e}}$.

13. -8　因为 $y=2^x-2^{-x}$ 为奇函数，所以依题意可得 $y=(x+4)(2x+a)=2x^2+(a+8)x+4a$ 为偶函数，则 $a+8=0$，解得 $a=-8$.

14. $\left(-\infty,\dfrac{9}{7}\right)$　$\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{4}{b^4}=\dfrac{1}{7}(a^4+b^4)\left(\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{4}{b^4}\right)=\dfrac{1}{7}\left(5+\dfrac{b^4}{a^4}+\dfrac{4a^4}{b^4}\right)\geqslant\dfrac{1}{7}\times(5+2\sqrt{4})=\dfrac{9}{7}$，当且仅当 $\dfrac{b^4}{a^4}=\dfrac{4a^4}{b^4}$，即 $b^4=2a^4$ 时，等号成立，所以 $m<\dfrac{9}{7}$.

15. 14　由 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<10x$，得 $[f(x)g(x)]'<(5x^2)'$.

设函数 $h(x)=f(x)g(x)-5x^2$，则 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-10x<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(1)>h(2)$，即 $f(1)g(1)-5\times1^2>f(2)g(2)-5\times2^2$，则 $f(2)g(2)-f(1)g(1)<15$. 因为 $f(2)g(2)-f(1)g(1)$ 为整数，所以 $f(2)g(2)-$

$f(1)g(1)$的可能取值的最大值为14.

16. $\frac{7\pi-3}{6}$(或$\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}$)　由 $\sin(\alpha+\beta)+\sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)+4(\alpha^2-\alpha)=-3$,得 $2\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{3})+2+4(\alpha-\frac{1}{2})^2=0$. 因为 $2\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{3})+2\geqslant0$, $4(\alpha-\frac{1}{2})^2\geqslant0$,所以当且仅当两个等号同时成立,即 $\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{3})=-1$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}$时,$2\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{3})+2+4(\alpha-\frac{1}{2})^2=0$,又 $\alpha,\beta\in[0,\frac{3\pi}{2}]$,所以 $\alpha+\beta+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$,所以 $\beta=\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}=\frac{7\pi-3}{6}$.

17. 解:$\angle CBD=180^\circ-\angle BCD-\angle BDC=55^\circ$, ………………………… 1分

在$\triangle BCD$中,由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$, ………………………… 4分

则 $BD=\frac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}=\frac{116\times\sin 30^\circ}{\sin 55^\circ}=\frac{58}{0.82}\approx70.73$ m. ………………………… 7分

在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AB\perp BD$,$\angle ADB=45^\circ$, ………………………… 8分

所以 $AB=BD\tan\angle ADB=BD\approx70.73$ m,

故黄河楼的实际高度约为 70.7 m. ………………………… 10分

18. 解:(1)由图可知 $f(0)=1+b=-1$, $f(1)=a+b=0$, ………………………… 2分

解得 $a=2$, $b=-2$,所以 $f(x)=2^x-2$. ………………………… 4分

(2)依题意可得 $g(x)=f(x+1)=2^{x+1}-2$, ………………………… 6分

所以 $g(x)\cdot f(-x)=(2^{x+1}-2)(2^{-x}-2)=2-2\times2^{x+1}-2\times2^{-x}+4=6-2(2^{x+1}+2^{-x})$.

………………………… 8分

因为 $2^{x+1}+2^{-x}\geqslant2\sqrt{2^{x+1}\cdot2^{-x}}=2\sqrt{2}$, ………………………… 9分

当且仅当 $2^{x+1}=2^{-x}$,即 $x=-\frac{1}{2}$时,等号成立, ………………………… 10分

所以 $g(x)\cdot f(-x)=6-2(2^{x+1}+2^{-x})\leqslant6-4\sqrt{2}$, ………………………… 11分

所以 $g(x)\cdot f(-x)$的最大值为 $6-4\sqrt{2}$. ………………………… 12分

19. 解:(1)设该三棱柱形实木块的高为 h cm,则由该三棱柱形实木块的所有棱长之和为 60 cm,

得 $6x+3h=60$,即 $2x+h=20$, ………………………… 2分

则 $h=20-2x$. ………………………… 3分

由$\begin{cases}x>0,\\h>0,\end{cases}$得 $0<x<10$, ………………………… 4分

所以 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2h=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2(20-2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(10x^2-x^3)(0<x<10)$. ………………………… 6分

(2)设 $V(x)=V=\frac{\sqrt{3}}{2}(10x^2-x^3)(0<x<10)$,

则 $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x(20-3x)$. ………………………… 7分

当 $0<x<\frac{20}{3}$ 时，$V'(x)>0$；当 $\frac{20}{3}<x<10$ 时，$V'(x)<0$. …………………… 9分

所以 $V(x)$ 在 $(0,\frac{20}{3})$ 上单调递增，在 $(\frac{20}{3},10)$ 上单调递减，…………………… 10分

所以 $V(x)_{\max}=V(\frac{20}{3})=\frac{2000\sqrt{3}}{27}$，…………………… 11分

故该三棱柱形实木块体积的最大值为 $\frac{2000\sqrt{3}}{27}$ cm^3. …………………… 12分

20. 解：(1)由 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$，…………………… 2分

解得 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$ 或 $\frac{4}{3}$，…………………… 3分

因为 α 为钝角，所以 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，…………………… 4分

所以 $f(\alpha)=\frac{\sin^2\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$ …………………… 5分

$=\frac{\tan^2\alpha-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{9}{16}+\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}+1}=\frac{21}{25}$. …………………… 6分

(2) $f(x)=\sin^2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，…………………… 8分

由 $f(\beta)=\frac{1}{6}$，得 $\sin(2\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{3}$. …………………… 9分

因为 $\beta\in(\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8})$，所以 $2\beta+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\cos(2\beta+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{7}}{3}$. …………………… 10分

故 $\cos(2\beta-\frac{\pi}{12})=\cos[(2\beta+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{3}]=\cos(2\beta+\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{3}+\sin(2\beta+\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{6}$.

…………………… 12分

21. 解：(1)因为 $a=-1$，所以 $f(x)=2^{1-x}-x$，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为减函数，…………………… 2分

因为 $f(-1)=2^2+1=5$，$f(1)=1-1=0$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的值域为 $[0,5]$. …… 4分

(2)由 $f(f(x))-x=0$，得 $2^{1+af(x)}-f(x)-x=0$，

则 $2^{1+af(x)}-(2^{1+ax}-x)-x=0$，则 $2^{1+af(x)}=2^{1+ax}$，所以 $1+af(x)=1+ax$，…………………… 5分

因为 $a\neq0$，所以 $2^{1+ax}-x=x$，…………………… 6分

所以 $a=\frac{\ln x}{x\ln 2}$. …………………… 7分

令函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x\ln 2}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2\ln 2}$. …………………… 8分

当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$. …………………… 9分

所以 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减. …………………… 10分

当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g(x)>0$. ………………………………………… 11 分

故 a 的取值范围是 $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2})$. ………………………………………………… 12 分

22.(1)解：因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+x$， ………………………………………………………… 1 分

所以 $f'(1)=\dfrac{1}{1+1}+1=\dfrac{3}{2}$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的斜率为 $\dfrac{3}{2}$. ………… 2 分

(2)解：设函数 $\varphi(x)=f(x)-x=\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{2}-x$，

则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x}+x-1=\dfrac{x^2}{1+x}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$， ……………………… 3 分

则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， …………………………………………………………… 4 分

所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，从而 $f(x)-x>0$，即 $f(x)>x$. ……………………………………… 5 分

(3)证明：设函数 $h(x)=f(x)+1-g(x)=\ln(1+x)+1-\cos x$，

当 $x>0$ 时，$1-\cos x\geqslant0$，$\ln(1+x)>0$，则 $h(x)>0$ 恒成立， ……………………………… 6 分

则由 $h(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}})>0$，得 $f(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}})+1>g(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}})$，又 $f(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}})+1=g(b)$，所以 $g(b)>g(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}})$. …… 7 分

因为 $g'(x)=x-\sin x$ 的导数 $g''(x)=1-\cos x\geqslant0$，所以当 $x>0$ 时，$g'(x)>g(0)=0$，所以

$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， ………………………………………………………………… 8 分

又 $b>0$，$\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}>0$，所以 $b>\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$. ………………………………………………………… 9 分

同理得 $f(b^2)+1>g(b^2)$，要证 $f(b^2)+1>g(a+1)$，只需证 $g(b^2)>g(a+1)$，

即证 $b^2>a+1$. ………………………………………………………………………………… 10 分

因为 $b>\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$，所以 $b^2>\mathrm{e}^a$.

设函数 $m(x)=\mathrm{e}^x-x-1(x>0)$，则 $m'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $a>0$，所以 $m(a)>m(0)=0$，所以 $\mathrm{e}^a>a+1$，

所以 $b^2>a+1$， …………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $g(b^2)>g(a+1)$，从而 $f(b^2)+1>g(a+1)$ 得证. ……………………………………… 12 分