2024届新高三开学联考

数学参考答案及解析

一、单选题

1. B 【解析】因为 $z^2=-1$，所以 $z=\pm i$，又复数 z 的虚部小于0，所以 $z=-i$，所以 $z(1-z)=-i(1+i)=1-i$. 故选 B.

2. A 【解析】由 $1-x^2>0$ 得，$-1<x<1$，所以 $M=\{0\}$，$M\cap N=\{0\}$. 故选 A.

3. C 【解析】如图所示，可求得器皿中雪表面的半径为 $\frac{20+40}{4}=15$ cm，所以平地降雪厚度的近似值为 $\frac{\frac{1}{3}\pi\times20\times(10^2+15^2+10\times15)}{\pi\times20^2}=\frac{95}{12}$ cm. 故选 C.

4. D 【解析】设公差为 d，则 $a_6=a_3+(6-3)d=a_3+3d=2a_3$，$a_3=3d$，$S_{17}=\frac{(a_1+a_{17})\times17}{2}=\frac{2a_9\times17}{2}=17a_9$，$a_9=a_6+3d=3a_3$，则 $\frac{S_{17}}{a_3}=\frac{17\times3a_3}{a_3}=51$. 故选 D.

5. C 【解析】由 $a^{\log_3 a}=3^{\log_3 81}$，两边取对数得 $\log_3 a^{\log_3 a}=\log_3 81$，所以 $(\log_3 a)^2=4$，所以 $\log_3 a=2$ 或 -2，所以 $a=9$ 或 $\frac{1}{9}$. 故选 C.

6. D 【解析】因为 $f(0)=\frac{1}{2}$，$\varphi\in[0,\pi)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$，当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 时，可以验证，此时 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ 上单调递增，舍去；当 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ 时，可以验证：此时 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{5\pi}{6}\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ 上单调递减，所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$. 故选 D.

7. B 【解析】将 $x-y+\frac{1}{4}=0$ 与 $y=x^2$ 联立得，$A\left(\frac{1-\sqrt2}{2},\frac{3-2\sqrt2}{4}\right)$，$B\left(\frac{1+\sqrt2}{2},\frac{3+2\sqrt2}{4}\right)$，所以 AB 的长为 $\sqrt2\cdot|x_A-x_B|=2$，由已知得，直线 $x-y+\frac{1}{4}=0$ 经过抛物线的焦点，且 l：$y=-\frac{1}{4}$ 为准线，所以 $|PQ|=\frac{|AB|}{2}=1$，所以 $\triangle QAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PQ|\cdot|x_A-x_B|=\frac{\sqrt2}{2}$. 故选 B.

8. D 【解析】令 $f(x)=x+\sin x$，$g(x)=\ln(x+1)$，$h(x)=e^x-1$，$p(x)=h(x)-f(x)=e^x-1-x-\sin x$，$q(x)=h(x)-g(x)=e^x-1-\ln(x+1)$，$p'(x)=e^x-1-\cos x$，$q'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$，令 $m(x)=p'(x)$，$m'(x)=e^x+\sin x$. 当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$m'(x)>0$，所以 $p'(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时单调递增，所以当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$p'(x)<p'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt e-1-\cos\frac{1}{2}<\sqrt e-1-\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt e-1-\frac{\sqrt3}{2}<0$，所以 $p(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时单调递减，所以 $p(0.001)<p(0)=0$，所以 $c<a$；当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$q'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}\geqslant0$，所以 $q(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $q(0.001)>q(0)=0$，所以 $c>b$. 综上，$a>c>b$. 故选 D.

二、选择题

9. ABC 【解析】铁棍的长度从小到大排列为 3.61，3.62，3.62，3.62，3.63，3.63，3.64，3.65（单位：cm）. 对于 A：极差为 $3.65-3.61=0.04$，故 A 正确；对于

B：众数为 3.62，故 B 正确；对于 C：中位数为 $\frac{3.62+3.63}{2}=3.625$，故 C 正确；对于 D：因为 $8\times80\%=6.4$，所以铁棍的第 80 百分位数为从小到大排列的第 7 个数，是 3.64，所以 D 不正确. 故选 ABC.

10. BC 【解析】$x^2+y^2-2x-6=0$ 变为 $(x-1)^2+y^2=7$，所以 C 的坐标为 $(1,0)$，$|MC|=\sqrt7$，故 A 错误；直线 l 过点 A，则 $-1=1+b$，$b=-2$，所以 C 到直线 l 的距离为 $\frac{|1-2-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt2}{2}$，故 B 正确；$\sqrt7-1=r-|CA|\leqslant|MA|\leqslant r+|CA|=\sqrt7+1$，故 C 正确；圆 C 与 x 轴相交所得的弦长为 $2\sqrt7$，圆 C 与 y 轴相交所得的弦长为 $2\sqrt6$，所以圆 C 与坐标轴相交所得的四点构成的四边形面积为 $\frac{1}{2}\times2\sqrt7\times2\sqrt6=2\sqrt{42}$，故 D 错误. 故选 BC.

11. ABD 【解析】设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 α，则 $\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|}=\frac{1}{2}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，所以 A 正确；因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{a}=\frac{2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{3}$，$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2}{3}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{2\boldsymbol{e}_1^2-2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2^2}{9}=\frac{2-1+\frac{1}{2}-1}{9}=\frac{1}{18}$，所以 B 正确；$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\lambda\boldsymbol{e}_1-\lambda\boldsymbol{e}_2)=\frac{1}{3}((2+\lambda)\boldsymbol{e}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{e}_2)$，因为 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{b}$，所以 $\frac{2+\lambda}{1}=\frac{1-\lambda}{-1}$，$\lambda$ 不存在，所以 C 不正确；设 D 为 AB 的中点，则 $\overrightarrow{CD}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}=\frac{\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2}{6}$，所以 $|\overrightarrow{CD}|=\frac{\sqrt{\boldsymbol{e}_1^2+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_2^2}}{6}=\frac{\sqrt7}{6}$，所以 D 正确. 故选 ABD.

12. BD 【解析】由 $x^2-y^2-xy=2$ 整理得，$y^2+xy+2-x^2=0$，因为 $\Delta=x^2-4(2-x^2)=5x^2-8\geqslant0$，所以 $|x|\geqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$，所以 A 不正确，B 正确；令 $x+y=t$，即 $y=-x+t$，代入 $x^2-y^2-xy=2$ 得，$x^2+tx-(t^2+2)=0$，所以 $\Delta=t^2+4(t^2+2)=5t^2+8>0$，所以 $t\in\mathbf{R}$，即 $x+y\in\mathbf{R}$，所以 C 错误；令 $x^2+y^2=t$，$t>0$，所以 $x=\sqrt t\cos\theta$，$y=\sqrt t\sin\theta$. 因为 $x^2-y^2-xy=2$，所以 $t\cos^2\theta-t\sin^2\theta-\sqrt t\cos\theta\cdot\sqrt t\sin\theta=2$，所以 $t=\frac{2}{\cos2\theta-\frac{\sin2\theta}{2}}=\frac{4}{2\cos2\theta-\sin2\theta}=\frac{4}{\sqrt5\cos(2\theta+\varphi)}$，所以 $|t|\geqslant\frac{4\sqrt5}{5}$，即 $x^2+y^2\geqslant\frac{4\sqrt5}{5}$，所以 D 正确. 故选 BD.

三、填空题

13. $\frac{5}{6}$ 【解析】$\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. 故答案为 $\frac{5}{6}$.

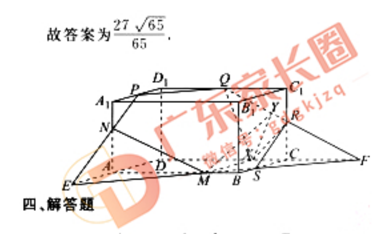
14. $\frac{17}{8}$ 【解析】令 $\sqrt{1-x}=t(t\geqslant0)$，则 $x=1-t^2$，$y=-2t^2+t+2=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}(t\geqslant0)$，所以 $y_{\max}=\frac{17}{8}$. 故答案为 $\frac{17}{8}$.

15. $\left(0,\frac{\sqrt2}{2}\right]$ 【解析】设 C 的半焦距为 c，则 $F(-c,0)$ 关于直线 $y=-x$ 的对称点 P 的坐标为 $(0,c)$，因为 P 落在 C 上或 C 内，所以 $b\geqslant c$，所以 $a^2-c^2=b^2\geqslant c^2$，所以 $e\in\left(0,\frac{\sqrt2}{2}\right]$. 故答案为 $\left(0,\frac{\sqrt2}{2}\right]$.

16. $\frac{27\sqrt{65}}{65}$ 【解析】如图所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $AB=BC=3$，$BS=1$，所以 $BM=1$，延长 SM 与 DA 的延长线交于 E，再连接 PE，PE 与 A_1A 的交点为 N，同理确定 R. 因为 $AE\parallel BS$，所以 $\frac{AM}{BM}=\frac{AE}{BS}$，因为 $BS=BM=1$，$AM=2$，所以 $AE=2$，因为 $A_1D_1=3$，P 为 A_1D_1 的中点，所以 $A_1P=\frac{3}{2}$，因为 $A_1P\parallel AE$，所以 $\frac{A_1P}{AE}=\frac{A_1N}{AN}$，又 $A_1A=2$，

所以 $AN=\frac{8}{7}$，同理 $CR=\frac{8}{7}$，$C_1R=\frac{6}{7}$，在 CD 上取一点 X，使得 $CX=1$，过 X 作 XY 与 QR 垂直，垂足为 Y，连接 MX，可以证明：$MY\perp QR$，且 $MX=3$. 因为 $S_{\triangle XQR}=S_{XCC_1Q}-S_{\triangle XCR}-S_{\triangle QC_1R}=\frac{9}{7}$，$QR=\sqrt{C_1Q^2+C_1R^2}=\frac{3\sqrt{65}}{14}$，所以 $\frac{1}{2}QR\cdot XY=\frac{9}{7}$，所以 $XY=\frac{12}{\sqrt{65}}$，所以 $MY=\sqrt{MX^2+XY^2}=\frac{27\sqrt{65}}{65}$.

故答案为 $\frac{27\sqrt{65}}{65}$.



四、解答题

17. 解：(1)因为 $(a-c)^2=b^2-(2-\sqrt2)ac$，

所以 $a^2+c^2-b^2=\sqrt2ac$， (2分)

由余弦定理得，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt2}{2}$， (4分)

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$. (5分)

(2) $\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$， (6分)

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$， (7分)

所以 $\frac{l}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{b}{\sin B}$， (8分)

所以 $b=\frac{l\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}$

$=\frac{(\sqrt6+2\sqrt3+3\sqrt2)\times\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}=2\sqrt2$. (10分)

18. 解：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

因为 a_1，$\frac{5}{8}$，a_3 成等差数列，所以 $a_1+a_1q^2=\frac{5}{4}$，

因为 $S_3=\frac{7}{4}$，所以 $a_1+a_1q+a_1q^2=\frac{7}{4}$， (2分)

相减得 $a_1q=\frac{1}{2}$，所以 $q=\frac{1}{2a_1}$，

代入 $a_1+a_1q^2=\frac{5}{4}$ 得 $4a_1^2-5a_1+1=0$，

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\q=2\end{cases}$ (4分)

因为 $a_{n+1}<a_n(\forall n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $\begin{cases}a_1=1,\\q=\frac{1}{2},\end{cases}$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$. (6分)

(2)由已知得，$b_n=-n\cdot2^n$， (7分)

$T_n=-[1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n-1)2^{n-1}+n\cdot2^n]$， (8分)

所以 $2T_n=-[1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)2^n+n\cdot2^{n+1}]$，

两个等式相减得 $-T_n=-(2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1})$， (10分)

所以 $T_n=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\frac{2-2^{n+1}}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$. (12分)

19. 解：(1)因为 E，F 分别为 PD，PB 的中点，所以 $EF\parallel BD$， (1分)

因为 $EF\not\subset$ 平面 BDG，$BD\subset$ 平面 BDG，

所以 $EF\parallel$ 平面 BDG. (3分)

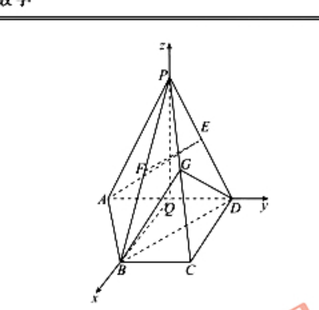
(2)因为三角形 PAD 是正三角形，Q 为 AD 的中点，

所以 $PQ\perp AD$，

又因为 $CD\perp PQ$，$AD\cap CD=D$，所以 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$，$BQ\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PQ\perp BQ$，

因为四边形 $BCDQ$ 是矩形，所以 $BQ\perp AD$，即直线 QP，AD，QB 两两垂直， (5分)

以 Q 为坐标系的原点，射线 QB，QD，QP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



(6分)

因为四边形 $BCDQ$ 是面积为 2 的矩形，$BC=QD=1$，所以 $BQ=2$.

由已知得，$P(0,0,\sqrt3)$，$B(2,0,0)$，$C(2,1,0)$，$D(0,1,0)$， (8分)

所以 $\overrightarrow{PC}=(2,1,-\sqrt3)$，$G\left(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt3}{2}\right)$. (10分)

设平面 BGD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BG}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt3}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$，

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{BG}\cdot\boldsymbol{n}=0\\\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt3}{2}z=0\\-2x+y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，得 $y=2$，$z=0$.

$\therefore\boldsymbol{n}=(1,2,0)$，设 PC 与平面 BGD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\sqrt8\times\sqrt5}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以 PC 与平面 BGD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. (12分)

20. 解：(1)设 E 的半焦距为 c，因为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点坐标为 $(2,0)$，所以 $c=2$， (1分)

因为 E 的离心率为 2，所以 $a=1$，$b^2=c^2-a^2=3$. (3分)

所以双曲线 E 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. (4分)

(2)当直线 l 的斜率为 0 时，显然不适合题意；当直线 l 的斜率不为 0 时，

设直线 l：$x=my+2\left(m\neq\pm\frac{\sqrt3}{3}\right)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=my+2\\3x^2-y^2=3\end{cases}$，消去 x，得 $(3m^2-1)y^2+12my+9=0$， (6分)

$3m^2-1\neq0$ 且 $\Delta=(12m)^2-36(3m^2-1)=36(m^2+1)>0$，

$y_1+y_2=-\frac{12m}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\frac{9}{3m^2-1}$， (7分)

所以 $x_1x_2=(my_1+2)(my_2+2)=m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4$

$=m^2\cdot\frac{9}{3m^2-1}-\frac{24m^2}{3m^2-1}+4=-\frac{3m^2+4}{3m^2-1}$， (9分)

令 $x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3m^2+4}{3m^2-1}+\frac{9}{3m^2-1}=0$，

解得，$m=\pm\frac{\sqrt5}{\sqrt3}$，此时 $OA\perp OB$， (11分)

所以存在直线 l：$\sqrt3x\pm\sqrt5y-2\sqrt3=0$，使 $OA\perp OB$ 成立. (12分)

21. 解：(1)由已知得，$X=0,20,40$，

$P(X=0)=C_2^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

$P(X=20)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，

$P(X=40)=C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

所以 X 的分布列为

X	0	20	40
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(3分)

由已知得，$Y=20,40$，

所以 $P(Y=40)=\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{3}$，

$P(Y=20)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

所以 Y 的分布列为

Y	20	40
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

(6分)

(2)甲在第二轮得分分类如下：

选 20 分和 30 分的题所得分数为 20 分和 50 分，

选 20 分和 40 分的题所得分数为 20 分和 60 分，

选 30 分和 40 分的题所得分数为 0 分，30 分，40 分和 70 分， (7分)

乙在第二轮得分分类如下：

选 20 分和 30 分的题所得分数为 0 分，20 分，30 分和 50 分，

选 20 分和 40 分的题所得分数为 0 分，20 分，40 分和 60 分，

选 30 分和 40 分的题所得分数为 0 分，30 分，40 分和 70 分， (8分)

由已知及(1)得，

甲两轮的总积分不低于 90 分的概率为

$P_{甲}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{5}{36}$； (9分)

乙两轮的总积分不低于 90 分的概率为，

$P_{乙}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\right]+\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{5}{48}$. (11分)

因为 $P_{甲}>P_{乙}$，所以甲更容易晋级复赛. (12分)

22. 解：(1) $f'(x)=\frac{1}{x+1}$，

设切点的坐标为 $(x_0,f(x_0))$，

则切线方程为 $y-\ln(x_0+1)=\frac{1}{x_0+1}(x-x_0)$，

因为切线过点 $(-1,-1)$，

所以 $-1-\ln(x_0+1)=\frac{1}{x_0+1}(-1-x_0)$，

解得 $x_0=0$，

所以切线方程为 $y=x$. (3分)

(2)①令 $h(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$，$h'(x)=e^x-x-1$，令 $h'(x)=m(x)$，

则 $m'(x)=e^x-1$，

当 $x>0$ 时，$m'(x)=e^x-1>0$，

所以 $m(x)=e^x-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h'(x)>h'(0)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)>h(0)=0$，

即当 $x>0$ 时，$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$； (6分)

② $g(x)=\ln(x+1)+ae^x$，$g'(x)=ae^x+\frac{1}{x+1}$，

若 $a\geqslant0$，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，最多只有一个零点，不符合题意； (7分)

若 $a<0$，$g'(x)=ae^x+\frac{1}{x+1}=\frac{a}{x+1}\left[e^x(x+1)+\frac{1}{a}\right]$，令 $n(x)=(x+1)e^x$，因为 $x+1>0$，$e^x>0$，且 $n'(x)=(x+2)e^x$，当 $x>-1$ 时，$n'(x)>0$，所以 $n(x)=(x+1)e^x$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为当 $x\to-1$ 时，$(x+1)e^x\to0$；当 $x\to+\infty$ 时，

$(x+1)e^x\to+\infty$，

又因为 $-\frac{1}{a}>0$，

所以 $-\frac{1}{a}=(x+1)e^x$ 恰有一解 $x=x_0$，

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 x_0 为函数 $g(x)$ 的唯一的极大值点， (8分)

因为当 $x\to-1$ 时，$g(x)=ae^x+\ln(x+1)\to-\infty$，

当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)=ae^x+\ln(x+1)\to-\infty$，

所以函数 $g(x)$ 有两个不同的零点 x_1，x_2 等价于 $g(x_0)>0$，即 $ae^{x_0}+\ln(x_0+1)>0$. (9分)

不妨设 $x_2>x_1$，

当 $x\in(-1,0]$，$g(x)<0$，所以 $x_2>x_1>0$，

由(1)得，直线 $y=x$ 与函数 $y=\ln(x+1)$ 切于原点得：当 $x>0$ 时，$\ln(x+1)<x$，

因为 $a<0$，所以当 $x>0$ 时，$g(x)=ae^x+\ln(x+1)<a\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+x=\frac{ax^2}{2}+(a+1)x+a$，

令 $q(x)=\frac{ax^2}{2}+(a+1)x+a$，

即当 $x>0$ 时，$g(x)<q(x)$， (10分)

所以 $\frac{ax^2}{2}+(a+1)x+a=0$ 一定存在两个不同的根，设为 x_3，$x_4(x_3<x_4)$，

因为 $x_2>0$，

所以 $q(x_2)>g(x_2)=0=q(x_4)$，

又因为 x_2，x_4 位于单调递减区间，

所以 $x_2<x_4$，同理 $x_1>x_3$，

所以 $x_3<x_1<x_2<x_4$，所以 $x_4>x_2>0$，

因为 $x_3x_4=2>0$，所以 $x_3>0$，

又因为 $x_3+x_4=-\frac{2(a+1)}{a}$，

所以 $x_4-x_3=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}$

$=\sqrt{\frac{4(a+1)^2}{a^2}-8}$

$=2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-1}$，

所以 $|x_2-x_1|<2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-1}$. (12分)