哈师大附中 2023 年高三第三次模拟考试

数　　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第 I 卷（选择题共 60 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的）

1. 设集合 $A=\{x|1<2^x<8\}$，$B=\{x|y=\sqrt{-x^2-2x+8}\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-4,3]$　　B. $(0,2]$　　C. $[-4,0)$　　D. $[2,3)$

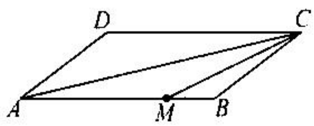
2. 已知复数 $z=\frac{1+i}{1-i}$，则 $|z|-\bar{z}=$

A. $1+i$　　B. 1　　C. $1-i$　　D. i

3. 平行四边形 $ABCD$ 中，点 M 在边 AB 上，$AM=3MB$，记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AD}=$

A. $\frac{4}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{3}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{4}{3}\boldsymbol{a}$

C. $\frac{7}{3}\boldsymbol{b}-\frac{4}{3}\boldsymbol{a}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{4}{3}\boldsymbol{b}$



4. 记 a,b,c,d 为 1,2,3,4 的任意一个排列，则使得 $(a+b)(c+d)$ 为奇数的排列个数为

A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 18

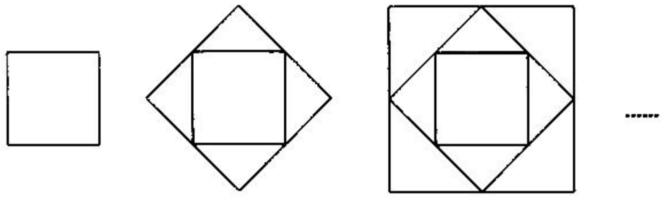
5. 已知函数 $f(x)=x^2$，平面区域 Ω 内的点 $P(x,y)$ 满足 $f(x)+f(y)<1$，$f(\sqrt{|x|})+f(\sqrt{|y|})>1$，则 Ω 的面积为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{2}-1$　　C. π　　D. $\pi-2$

6. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=AD$，点 E 是线段 PB 上的动点，则直线 DE 与平面 PBC 所成角的最大值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

7. 如图，阴影正方形的边长为 1，以其对角线长为边长，各边均经过阴影正方形的顶点，作第 2 个正方形；然后再以第 2 个正方形的对角线长为边长，各边均经过第 2 个正方形的顶点，作第 3 个正方形；依此方法一直继续下去. 若视阴影正方形为第 1 个正方形，第 n 个正方形的面积为 a_n，则 $\sum_{n=1}^{2023}[\cos(n\pi)\cdot\log_2 a_n]=$



A. 1011　　B. -1011　　C. 1012　　D. -1012

8. 已知函数 $f(x)$，对任意的 $x\in R$，都有 $f(x)+f(-x)=x^2$，当 $x\in[0,+\infty)$ 时 $f'(x)-x-1<0$，若 $f(2-a)\geqslant f(a)+4-4a$，则实数 a 的取值范围为

A. $[0,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(-\infty,0]$　　D. $(-\infty,1]$

二、选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9. 已知两个事件 A,B，满足 $P(A)>0,P(B)>0$，则下列结论正确的是

A. 若 A,B 为相互独立事件，则 $P(B)=P(B|A)$

B. 若 $P(B|A)=P(B)$，则 $P(A|B)=P(A)$

C. $P(AB)+P(AB)=P(B)$

D. $P(B|A)+P(B|\bar{A})=P(AB)$

10. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调．则下列结论正确的是

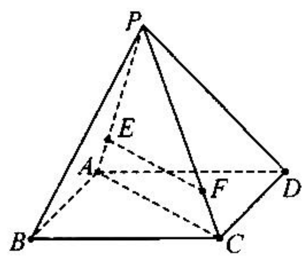
A. $\omega=3$

B. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 上有 2 个零点

D. 若 $x_1,x_2\in\left(\pi,\frac{7\pi}{6}\right)(x_1\neq x_2)$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(x_1+x_2)=-2$

11. 正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA=2$，$AB=\sqrt{2}$，过点 B 作截面分别交棱 PA、PC、PD 于点 E、F、M，且 $EF/\!/AC$，则下列结论正确的是



A. 若 M 为 PD 中点，则 $EF=\frac{4}{3}$

B. 若 $PD\perp$ 平面 $BEMF$，则截面 $BEMF$ 的面积 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

C. 若 E、F 为所在棱的中点，则 $PM=\frac{1}{2}$

D. 若 E、F 为所在棱的中点，则点 P 到平面 $BEMF$ 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

12. 已知曲线 $G:x^3+y^3-6xy=0(x>0,y>0)$，则

A. 曲线 G 关于直线 $y=x$ 轴对称

B. 曲线 G 与直线 $x+y-6=0$ 有唯一公共点

C. 曲线 G 与直线 $x-y+1=0$ 没有公共点

D. 曲线 G 上任意一点到原点的距离的最大值为 $3\sqrt{2}$

第Ⅱ卷(非选择题共90分)

三、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分)

13. 函数 $f(x)=\sin x\cdot\sin(x+\varphi)$,若 $\exists x_0\in R$,使得 $f(x_0)=1$,则 $\varphi=$________.(写出符合条件的一个 φ 值即可)

14. 若对于定义在 R 上的函数 $y=f(x)$,当且仅当存在有限个非零自变量值 x_0,使得 $f(-x_0)=-f(x_0)$,则称 $y=f(x)$ 为类奇函数,若函数 $y=x^4+(a^2-1)x^2+a\sin x$ 为类奇函数,则实数 a 的取值范围为________.

15. 若 $a=\log_2 3+\log_3 2$,$b=\log_2 e+\ln 2$,$c=\frac{13}{6}$,则实数 a,b,c 由小到大排列为______ < ______ < ______.

16. 将五个1、五个2、五个3、五个4、五个5共25个数填入一个5行5列的表格内(每格填入一个数),使得同一列中任何两数之差的绝对值不超过2.设每列中五个数之和的最小值为 M,则 M 的最大值为________.

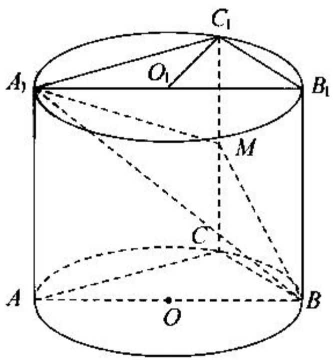
四、解答题(本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤)

17.(本小题满分10分)

如图,四边形 ABB_1A_1 是圆柱 OO_1 的轴截面,点 M 是母线 CC_1 的中点,圆柱底面半径 $R=\sqrt{2}$,$AA_1=2$.

(1)求证:O_1C_1∥平面 A_1BM;

(2)当三棱锥 A_1-ABC 的体积最大时,求平面 A_1BM 与平面 CBM 夹角的余弦值.



18.(本小题满分12分)

已知数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,满足 $2S_n=3(b_n-1)$,等差数列 $\{c_n\}$ 中,$c_1=5$,$c_1+c_2+c_3=27$.

(1)求 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 的通项公式;

(2)数列 $\{b_n\}$ 与 $\{c_n\}$ 的共同项由小到大排列组成新数列 $\{a_n\}$,求数列 $\{a_n\}$ 的前20的积 T_{20}.

19.(本小题满分12分)

我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了"三斜求积术",即已知三角形的三边长,求它的面积,用现代式子表示即为:$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$……①

(其中△ABC 内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c,S 为△ABC 的面积)

(1)证明公式①;

(2)已知△ABC 三条边 BC、AC、AB 的高分别为 $h_a=\frac{\sqrt{15}}{3}$、$h_b=\sqrt{2}$、$h_c=\sqrt{10}$,求 S.

20.(本小题满分12分)

碳中和是指国家、企业、产品、活动或个人在一定时间内直接或间接产生的二氧化碳或温室气体排放总量,通过植树造林、节能减排等形式,以抵消自身产生的二氧化碳或温室气体排放量,实现正负抵消,达到相对"零排放."2020年9月22日,中国政府在第七十五届联合国大会上提出:"中国将提高国家自主贡献力度,采取更加有力的政策和措施,二氧化碳排放力争于2030年前达到峰值,努力争取2060年前实现碳中和.某工厂响应国家号召,随着对工业废气进行处理新技术不断升级,最近半年二氧化碳排放量逐月递减,具体数据如下表:

月份序号(t_i)	1	2	3	4	5	6
碳排放量 p_i(吨)	100	70	50	35	25	20

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{6} t_i^2=91$, $\sum\limits_{i=1}^{6} t_i\ln p_i\approx 73.1$, $\sum\limits_{i=1}^{6}\ln p_i\approx 22.5$, $e^{4.87}\approx 130$, $e^{4.88}\approx 132$.

(1)这6个月中,任取2个月,求已知其中1个月的碳排放量低于6个月碳排放量的平均值的条件下,另1个月碳排放量高于6个月碳排放量的平均值的概率;

(2)若用函数模型 $p=p_0e^{kt}$ 对两个变量月份 t 与排放量 p 进行拟合,根据表中数据,求出 p 关于 t 的回归方程.

附:对于同一组数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$,其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$$

21.(本小题满分12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

(Ⅰ)若 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆上一定点,证明:直线 $\frac{xx_0}{16}+\frac{yy_0}{4}=1$ 与椭圆 C 相切;

(Ⅱ)若 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆外一点,过 P 作椭圆 C 的两条切线,切点分别为 M、N,直线 MN 分别交直线 $l_1:y=\frac{1}{2}x$、$l_2:y=-\frac{1}{2}x$ 于 A、B 两点,且 $\triangle AOB$ 的面积为8.问:在 x 轴是否存在两个定点 F_1、F_2,使得 $||PF_1|-|PF_2||$ 为定值.若存在,求 F_1、F_2 的坐标;若不存在,说明理由.

22.(本小题满分12分)

已知 $f(x)=e^x\cdot\sin x-x$.

(1)若 $g(x)=\frac{2-2x-f(x)}{e^x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$,证明:$g(x)$ 存在唯一零点;

(2)当 $x\in(-\infty,\pi)$ 时,讨论 $f(x)$ 零点个数.

哈师大附中2023年高三第三次模拟考试
数 学 答 案

一、单选题答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	D	C	B	B

二、多选题答案

题号	9	10	11	12
答案	ABC	BC	AD	ABD

三、填空题

13. $\varphi=2k\pi$（写出一个值即可） 14. $(-1,1)$ 15. $b<c<a$ 16. 10

四、解答题

17.（本大题满分10分）

（1）证明：连接 OO_1，$OO_1\cap A_1B=N$，则 $OO_1//CC_1$，且 $OO_1=CC_1$

$\begin{cases}O_1N=ON\\MC=MC_1\end{cases}\Rightarrow O_1C_1//MN$ ……………………2分

$\begin{cases}O_1C_1//MN\\O_1C_1\not\subset 平面A_1BM\\MN\subset 平面A_1BM\end{cases}\Rightarrow O_1C_1//平面A_1BM$ ……………………5分

（2）设 $AC=a,BC=b$，则 $a^2+b^2=8$

$V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{3}ab\le\frac{1}{3}\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{4}{3}$，当且仅当 $AC=BC=2$，体积最大 ………… 7分

如图所示，建立空间直角坐标系 $C-xyz$

$A_1(2,0,2),B(0,2,0),M(0,0,1)$，则 $\overrightarrow{MB}=(0,2,-1),\overrightarrow{MA_1}=(2,0,1)$

设平面 A_1BM 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y-z=0\\2x+z=0\end{cases}$

不妨取 $z=2$，则 $\vec{n}=(-1,1,2)$

……………………9分

取平面 BCM 的法向量 $\vec{m}=(1,0,0)$，则 $|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}|=\frac{\sqrt{6}}{6}$

所以平面 A_1BM 与平面 BCM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ……………………10分

18.（本大题满分12分）

（1）由题意得：

$\begin{cases}c_1=5\\c_2=9\end{cases}\Rightarrow c_n=4n+1$ ……………………2分

当 $n=1$ 时，$b_1=3$

当 $n\ge2$ 时，

$$\begin{cases}2S_n=3b_n-3\\2S_{n-1}=3b_{n-1}-3\end{cases}\Rightarrow b_n=3b_{n-1}$$

所以，$\{b_n\}$是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，$b_n=3^n$.

……………………………………6 分

（2）由已知可得：数列$\{a_n\}$是由$9,81,\cdots,9^n$构成，即：$a_n=9^n$

则$T_{20}=9^{1+2+3+\cdots+20}=9^{210}$

……………………………………………………………………12 分

19.（本大题满分 12 分）

（1）证明：$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 C}=\sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2 C)^2}$

所以，$S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2b^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2})^2]}$

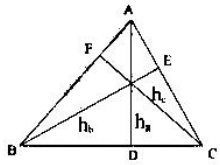
……………………………………………………6 分

（2）法一：

$2S=\frac{\sqrt{15}}{3}a=\sqrt{2}b=\sqrt{10}c\Rightarrow a=\frac{6}{\sqrt{15}}S,b=\sqrt{2}S,c=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}S$ ……………10 分

所以，$4S^2=\frac{36}{15}\cdot 2S^4-\frac{1}{4}\left[\frac{36}{15}S^2+2S^2-\frac{2}{5}S^2\right]^2$

$\Rightarrow S=\sqrt{5}$ ……………………………12 分



法二：

$$\begin{cases}b\sin C=c\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{3}\\a\sin B=b\sin A=\sqrt{10}\Rightarrow b=\sqrt{5}c,a=\sqrt{6}c\\a\sin C=c\sin A=\sqrt{2}\end{cases}$$ ……………………………………8 分

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{30}}{6}\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{6}}{6}$

所以，$a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{10}$，$c=\sqrt{2}$

……………………………………………………10 分

$S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2b^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2})^2]}=\sqrt{5}$ ……………………………………………………12 分

20.（本大题满分 12 分）

解：（1）设$A=$“1 个月的碳排放低于 6 个月排放的平均值”，
$B=$“1 个月的碳排放高于 6 个月排放的平均值”，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{C_3^1\cdot C_3^2}{C_6^2}}{\frac{C_3^1\cdot C_3^1+C_3^2}{C_6^2}}=\frac{1}{2}$$ ……………………………4 分

（2） $p=p_0e^{kt}\Rightarrow \ln p=kt+\ln p_0$

则 $\hat{k}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}t_i\ln p_i-\bar{t}\cdot\sum\limits_{i=1}^{6}\ln p_i}{\sum\limits_{i=1}^{6}t_i^2-6\bar{t}^2}\approx-0.32$，

……………………………8 分

$\hat{a}=3.75+0.32\cdot\dfrac{7}{2}=4.87$

……………………………10 分

所以，回归方程为：$\ln p=-0.32t+4.87\Rightarrow p=e^{4.87}\cdot e^{-0.32t}\approx 130e^{-0.32t}$

……………………………12 分

方法二：$\hat{k}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}t_i\ln p_i-\bar{t}\cdot\sum\limits_{i=1}^{6}\ln p_i}{\sum\limits_{i=1}^{6}t_i^2-6\bar{t}^2}=-\dfrac{113}{350}$，

……………………………8 分

$\hat{a}=\dfrac{15}{4}+\dfrac{113}{350}\cdot\dfrac{7}{2}=4.88$

……………………………10 分

所以，回归方程为：$\ln p=-0.32t+4.88\Rightarrow p=e^{4.88}\cdot e^{-\frac{113}{350}t}\approx 132e^{-\frac{113}{350}t}$

……………………………12 分

21.（本大题满分 12 分）

解：（1）当 $y_0=0$ 时，$x_0=\pm2$，直线 $\dfrac{x_0x}{16}+\dfrac{y_0y}{4}=1$ 与椭圆 C 相切

…………1 分

当 $y_0\neq0$ 时，$\dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{4}=1$

$$\begin{cases}y=\dfrac{16-x_0x}{4y_0}\\ x^2+4y^2-16=0\end{cases}\Rightarrow(x_0^2+4y_0^2)x^2-32x_0x+16(16-4y_0^2)=0$$

所以，$x^2-2x_0x+16-4y_0^2=0,\Delta=x_0^2+4y_0^2-16=0$

所以，直线 $\dfrac{x_0x}{16}+\dfrac{y_0y}{4}=1$ 与椭圆 C 相切.

……………………………4 分

（2）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则由（1）得：

$$\begin{cases}\dfrac{x_1x}{16}+\dfrac{y_1y}{4}=1\\ \dfrac{x_2x}{16}+\dfrac{y_2y}{4}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_1x_0}{16}+\dfrac{y_1y_0}{4}=1\\ \dfrac{x_2x_0}{16}+\dfrac{y_2y_0}{4}=1\end{cases}$$

所以，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 是方程 $\frac{x_0x}{16}+\frac{y_0y}{4}=1$ 的两个根

所以，MN 的方程为：$\frac{x_0x}{16}+\frac{y_0y}{4}=1$

……………………………6 分

联立，得 $\begin{cases} y=\frac{16-x_0x}{4y_0} \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow x_A=\frac{16}{2y_0+x_0}$，同理：$x_B=\frac{16}{2y_0-x_0}$

$x_A\cdot x_B=\frac{16^2}{4y_0^{\ 2}-x_0^{\ 2}}$　（$y_A\cdot y_B=\frac{64}{4y_0^{\ 2}-x_0^{\ 2}}$）

……………………………8 分

$\tan\angle AOB=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{1+(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{4}{3}\Rightarrow\sin\angle AOB=\frac{4}{5}$

……………………………10 分

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}|x_A|\sqrt{1+\frac{1}{4}}|x_B|\cdot\frac{4}{5}=8$

所以，$4y_0^{\ 2}-x_0^{\ 2}=\pm16$，点 P 的轨迹是双曲线.

存在 x 轴上的点 $F_1(-2\sqrt{5},0),F_2(2\sqrt{5},0)$，使得 $\big||PF_1|-|PF_2|\big|=8$ 成立.

……………………………12 分

22.（本大题满分 12 分）

解：（1）$g(x)=\frac{2-x-e^x\sin x}{e^x}$ 的定义域为 $(0,\frac{\pi}{2})$

$g(x)=(2-x)e^{-x}-\sin x\Rightarrow g'(x)=(x-3)e^x-\cos x$

……………………………2 分

所以，$g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 递减

$\begin{cases} g(\frac{\pi}{2})=(2-\frac{\pi}{2})e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0 \\ g(0)=2>0 \end{cases}\Rightarrow\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g(x_0)=0$

即：$g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上存在唯一零点.

……………………………4 分

（2）令 $f(x)=0$，则 $\sin x-x\cdot e^{-x}=0$

设 $h(x)=x\sin x-x\cdot e^{-x},h(0)=0$，

$h'(x)=\cos x-(1-x)e^{-x}$

1）当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$1-x>1,e^{-x}>1,-1\le\cos x\le1$，则 $h'(x)<0$

所以，$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递减，又 $h(0)=0$，

$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 无零点

……………………………………6 分

2）当 $x\in[0,\pi)$ 时，令 $t(x)=\cos x-(1-x)e^{-x}$，则 $t'(x)=-\sin x+(2-x)e^{-x}$

①若 $0\le x<\dfrac{\pi}{2}$，由（1）可知 $t'(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 递减，存在 $x_0\in[0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $t'(x)=0$

所以，$t(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递增，$(x_0,\dfrac{\pi}{2})$ 递减

②若 $\dfrac{\pi}{2}<x<2$，令 $\varphi(x)=(2-x)e^{-x}$，$\varphi(x)=(x-3)e^{-x}<0$

$\varphi(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},2]$ 递减，则 $\varphi(x)<\varphi(\dfrac{\pi}{2})=(2-\dfrac{\pi}{2})e^{-\frac{\pi}{2}}$，且 $0<2-\dfrac{\pi}{2}<1$，$e^{-\frac{\pi}{2}}<e^{-1}$

则 $\varphi(x)<\dfrac{1}{e}$

$\sin x\ge\sin 2=\sin(\pi-2)>\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

所以，$t'(x)<\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{2}<0$，$t(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},2]$ 递减.

……………………………………9 分

3）当 $x\in(2,\pi)$ 时，$t'(x)=-\sin x+(2-x)e^{-x}$，$t(x)$ 在 $(2,\pi)$ 递减

综上：由 1），2），3）可知 $t(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递增，(x_0,π) 递减

$$\begin{cases} t(x_0)>t(0)=0 \\ t(\pi)=-1+(\pi-1)e^{-\pi}<0 \end{cases}$$

存在 $x_1\in(x_0,\pi)$，使得 $t(x_1)=0$

所以，$h(x)$ 在 $(0,x_1)$ 递增，(x_1,π) 递减，$h(0)=0$，$h(\pi)<0$

……………………………………11 分

$h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 只有一个零点

综上可得：$h(x)$ 在 $(-\infty,\pi)$ 有两个零点.

……………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。