

# 高三数学试卷

## 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:集合与常用逻辑用语,函数与导数,三角函数,不等式。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设命题  $p: \exists n \in \mathbf{N}, \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2}$ , 则  $\neg p$  为

A.  $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2}$

B.  $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$

C.  $\exists n \in \mathbf{N}, \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$

D.  $\exists n \notin \mathbf{N}, \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2}$

2. 已知正数  $a, b$  满足  $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , 则  $3a + b$  的最小值为

A. 13

B. 16

C. 9

D. 12

3. 已知  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \pi$ ) 是奇函数, 将  $f(x)$  图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 所得图象对应的函数为  $g(x)$ . 若  $g(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ , 则  $f(\frac{\pi}{12}) =$

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 1

4. “不等式  $ax^2 + 2ax - 1 < 0$  恒成立”的一个充分不必要条件是

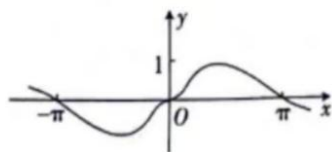
A.  $-1 \leq a < 0$

B.  $a \leq 0$

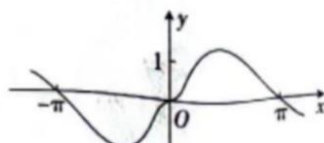
C.  $-1 < a \leq 0$

D.  $-1 < a < 0$

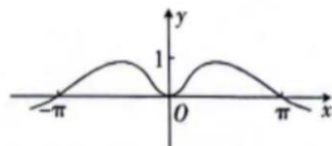
5. 函数  $f(x) = \frac{2x \sin x}{x^2 + 1}$  在区间  $[-4, 4]$  上的大致图象是



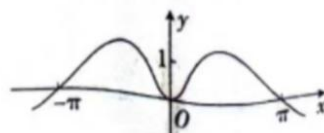
A



B



C



D

6. 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(2+x) = -f(-x)$ , 且曲线  $y=f(x)$  与曲线  $y = -\frac{1}{x-1}$  有且只有两个交点, 则函数  $g(x) = f(x) + \frac{1}{x-1}$  的零点之和是
- A. 2                      B. -2                      C. 4                      D. -4
7. 已知不恒等于零的函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 满足  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ , 且  $f(1) = \frac{1}{2}$ , 则下列说法正确的是
- A.  $f(0) = 0$                       B.  $f(x)$  的图象关于原点对称
- C.  $f(-2) = \frac{1}{2}$                       D.  $f(x)$  的最小正周期是 6
8. 不等式  $t(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{2x+2y}$  对所有的正实数  $x, y$  恒成立, 则  $t$  的最大值为
- A. 2                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                       D. 1

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x | x^2 - 3x - 4 > 0\}$ ,  $B = \{x | 1 < 2^x < 4\}$ , 则
- A.  $A \cup B = \mathbf{R}$                       B.  $A \cap B = \emptyset$                       C.  $\complement_U A \subseteq B$                       D.  $B \subseteq \complement_U A$
10. 下列结论正确的是
- A. 若  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ , 则  $\sin \alpha = \cos \beta$
- B.  $2\sin^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha = 1 + 2\sin(2\alpha - \frac{\pi}{3})$
- C. 若  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ , 则  $\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$
- D. 若锐角  $\alpha$  满足  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -3$
11. 设函数  $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$  ( $\omega > 0$ ) 在  $(0, \pi)$  上恰有两个极值点, 两个零点, 则  $\omega$  的取值可能是
- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{5}{3}$                       C. 2                      D.  $\frac{13}{6}$
12. 已知函数  $f(x) = a^x + b^x$  ( $a > b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ ) 的最小值为 2, 则
- A.  $b > 1$                       B.  $a > 1 > b$                       C.  $ab > 1$                       D.  $ab = 1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知函数  $f(x) = f'(-1) \cdot x^2 + 2x$ , 则  $f'(-1) = \blacktriangle$ .
14. 已知  $\alpha$  是第三象限角, 且  $\tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha - 3 = 0$ , 则  $\frac{4 \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) - \cos(-\alpha)} = \blacktriangle$ .
15. 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率, 曲线的曲率定义如下: 若  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数,  $f''(x)$  是  $f'(x)$  的导函数, 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(x, f(x))$  处的曲率  $K = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$ . 已知函数  $f(x) = x^2 - x$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的曲率为  $\blacktriangle$ .

16. 研究发现某人的行车速度  $v$ (km/h) 与行驶地区的人口密度  $p$ (人/ $\text{km}^2$ ) 有如下关系:  $v=50 \times (0.5+2^{-0.00004p})$ , 若此人在人口密度为  $a$  人/ $\text{km}^2$  的地区的行车速度为 70 km/h, 则他在人口密度为  $2a$  人/ $\text{km}^2$  的地区的行车速度是  $\underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle \hspace{1cm}$  km/h.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知全集  $U=\{x \in \mathbf{N} | 0 < x-1 < 5\}$ , 集合  $A=\{x | x^2-7x+12=0\}$ ,  $B=\{2, 3, m^2\}$ .

(1) 求  $\complement_U A$ ;

(2) 若  $(a^2+1) \in \complement_U A$ , 且  $a \in U$ , 求  $a$  的值;

(3) 设集合  $C=B \cap (\complement_U A)$ , 若  $C$  的真子集共有 3 个, 求  $m$  的值.

18. (12 分)

已知函数  $f(x)=x^3-ax^2-x$ , 且  $f'(1)=0$ .

(1) 求  $f(x)$  在  $[-1, 2]$  上的最大值;

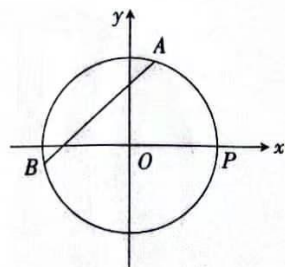
(2) 设函数  $g(x)=4x+m$ , 若函数  $y=f(x)-g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有三个零点, 求实数  $m$  的取值范围.

19. (12 分)

如图, 已知两质点  $A, B$  同时从点  $P$  出发, 绕单位圆逆时针做匀速圆周运动, 质点  $A, B$  运动的角速度分别为  $3 \text{ rad/s}$  和  $5 \text{ rad/s}$ , 设两质点运动  $x$  s 时这两质点间的距离为  $f(x)$ .

(1) 求  $f(x)$  的解析式;

(2) 求这两质点从点  $P$  出发后第  $n$  次相遇的时间  $x_n$  (单位: s).



20. (12分)

某企业计划对甲、乙两个项目共投资 200 万元,且每个项目至少投资 10 万元. 依据前期市场调研可知,甲项目的收益  $p(t)$ (单位:万元)与投资金额  $t$ (单位:万元)满足关系式  $p(t) = at^3 + 21t$ ;乙项目的收益  $g(t)$ (单位:万元)与投资金额  $t$ (单位:万元)满足关系式  $g(t) = -2a(t-b)^2$  ( $b < 200$ ). 设对甲项目投资  $x$  万元,两个项目的总收益为  $f(x)$ (单位:万元),且当对甲项目投资 30 万元时,甲项目的收益为 180 万元,乙项目的收益为 120 万元.

(1)求  $f(x)$  的解析式.

(2)试问如何安排甲、乙这两个项目的投资金额,才能使总收益  $f(x)$  最大? 并求出  $f(x)$  的最大值.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{a-x}{2+bx}$ ,  $g(x) = m \cdot 4^x - 2^{x+2} + 3$ .

(1)若  $y = \lg [g(x)]$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 求满足条件的整数  $m$  的值;

(2)已知非常数函数  $f(x)$  是定义域为  $(-2, 2)$  的奇函数, 若  $\forall x_1 \in [1, 2), \exists x_2 \in [-1, 1]$ ,

$f(x_1) - g(x_2) > -\frac{1}{2}$ , 求实数  $m$  的取值范围.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = a(e^x - 1) - x \ln x$ .

(1)当  $a = 1$  时, 求  $f(x)$  的图象在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(2)当  $a \geq 1$  时, 证明:  $f(x) + \cos x > 0$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

