2023年安庆二模数学试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	C	D	A	A	C	ABD	ABC	ACD	AD

1.A.解析：$M=\{x|0\leqslant x<1\}$，$N=\{x|x<0\}$，所以$M\cap N=\varnothing$，故选A.

2.B.解析：$\because \mathbf{i}\cdot z=2022-\mathbf{i},\therefore z=-1-2022\mathbf{i},\bar{z}=-1+2022\mathbf{i},\therefore z-\bar{z}=-4044\mathbf{i}$.模是4044.故选B.

3.C.解析：由频率之和为1得：$10(0.01+0.02+0.03+2a+0.01)=1$，解得$a=0.015$，

由$10\times0.01=0.1<0.25$，$10\times0.01+10\times0.02=0.3>0.25$，故第25百分位数位于$[40,50)$内，

则第25百分位数为$40+\dfrac{0.25-0.1}{0.3-0.1}\times10=47.5$.可以估计该市高中学生每天体育活动时间的第25百分位数约为47.5，故选C.

4.C.解析：由$|\vec{a}+\vec{b}|^2=4$有，$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=4$，即

$4\geqslant2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|(1+\cos\theta)\geqslant\dfrac{8}{3}(1+\cos\theta)$，因此$\cos\theta\leqslant\dfrac{1}{2}$. 由于$\theta\in[0,\ \pi]$，所以$\dfrac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\pi$，

于是夹角为θ的最小值为$\dfrac{\pi}{3}$.故选C.

5.D.解析: 因为$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，且α为第二象限角，所以$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

于是$\sin2\beta-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=-[\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)]=-\sin2\alpha=-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=-2\times\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$. 故选D.

6.A. 解析： 法1：设$a_1=2\cos\theta$，$a_4=2\sin\theta$，则$a_2+a_3=a_1+a_4=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以$a_2+a_3\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$. 故选A.

法2：因为$(\dfrac{a_1+a_4}{2})^2\leqslant\dfrac{a_1^2+a_4^2}{2}=2$,所以$|a_1+a_4|\leqslant2\sqrt{2}$.

因此$a_2+a_3=a_1+a_4\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$. 故选A.

1 官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

7.A.解析：方法 1.由题意得，方程$\dfrac{f(x)}{|x|}=|x-k|$有三个不等的实数根.

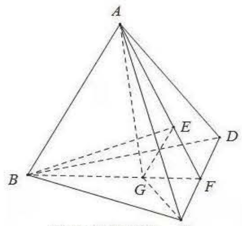
$y=\dfrac{f(x)}{|x|}=\begin{cases}|\ln x|, & x>0\\ \mathrm{e}^x, & x<0\end{cases}$，分别作出函数$y=\dfrac{f(x)}{|x|}$和$y=|x-k|$的图象，可得$k$的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. 故选 A.

方法 2. 取$k=-2,-1,1$作图检验可得.

8.C.解析：圆柱半径为 1，截面与底边所成角为45°，作$AM\perp OO_1$于M，则$\angle MAO_1=45^\circ$，$AO_1=\sqrt{2}$. 截面椭圆是以O_1为中心，A为长轴端点的椭圆，其长轴长为$2\sqrt{2}$，短轴长为 2，作$BC\perp AO_1$于C，利用解析几何知识易得$BO_1=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$，$CO_1=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，过$C$作$CD\perp OO_1$，则$O_1D=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CO_1=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，$OD=OO_1-O_1D=2-\dfrac{\sqrt{7}}{7}=\dfrac{14-\sqrt{7}}{7}$ 由于BC，CD均平行于底面，故B点到底面的距离是$\dfrac{14-\sqrt{7}}{7}$. 故选 C.

9.ABD.解析：因为$f(x)$与$g(x)$的图象振幅相等，所以$\sqrt{1+a^2}=2$，而$a>0$，因此$a=\sqrt{3}$. 所以函数$f(x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})$. 将函数$f(x)$的图象上的点的横坐标缩短为原来的$\dfrac{1}{2}$倍，然后将所得图象向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位得到函数$y=2\sin(2\omega x+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2\omega\pi}{3})$的图象，所以$g(x)=2\sin(2\omega x+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2\omega\pi}{3})$，由于$\omega>0$，从而$\omega=1$.于是$\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})=\cos(2x+\varphi)$，即$\cos(2x-\dfrac{5\pi}{6})=\cos(2x+\varphi)$，从而$\varphi=2k\pi-\dfrac{5\pi}{6}$，$k\in Z$.因此$f(x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$，$g(x)=2\cos(2x-\dfrac{5\pi}{6})$，函数$f(x)$的最小正周期为$2\pi$. A 正确. $x=-\dfrac{\pi}{12}$是函数$g(x)$的一条对称轴，故 B 正确；单调递增区间为$\left[2k\pi-\dfrac{5\pi}{6},2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right](k\in Z)$， C 不正确. 函数$g(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$的值域为$[-\sqrt{3},2]$， D 正确. 故选 ABD.

10.ABC.解析：由于G,E分别是$\Delta BCD,\Delta ACD$的重心，所以分别延长BG，AE交CD于中点F.



第 10 解答题图

因为 $BG:GE=2:1$， $AE:EF=2:1$，

所以 $BG:GF=AE:EF=2:1$, 故 $GE//AB$. $\overrightarrow{GE}\not\subset$ 平面 ABD , $\overrightarrow{AB}\subset$ 平面 ABD ,因此 $GE//$ 平面 ABD . A 正确.

因为 G 是 ΔBCD 的重心，所以

$S_{三棱锥\Delta GBC}=\dfrac{1}{3}S_{三棱锥\Delta DBC}$. 因此 $V_{三棱锥A-GBC}=\dfrac{1}{3}V_{三棱锥A-DBC}$ .B 正确.

显然线段 AG,BE 的交点分 AG,BE 为 $3:1$, 同理线段 AG,CP 和线段 AG,DH 的交点分 AG 为 $3:1$, 因此四条直线 AG,BE,CP,DH 相交于一点.C 正确.

因为 $GE//AB$, 所以 $GE//AB:GE=BF:GF=3:1$. 因此 $AB=3GE$ .D 错误.故选 ABC.

11.ACD.解析：由 $a_n=\ln\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$ 得， $1=\ln\dfrac{x_1+2}{x_1-2}$, 解得 $x_1=\dfrac{2\mathbf{e}+2}{\mathbf{e}-1}$.

$(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f(x_n)=0$ 就是 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

由 $f(x)=x^2-4$ 得， $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2-4}{2x_n}=\dfrac{x_n^2+4}{2x_n}$. 一方面， $x_{n+1}+2=\dfrac{(x_n+2)^2}{2x_n}$.

另一方面， $x_{n+1}-2=\dfrac{(x_n-2)^2}{2x_n}$.因此 $\dfrac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=\dfrac{(x_n+2)^2}{(x_{n+1}-2)^2}$,

于是 $\ln\left(\dfrac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}\right)=2\ln\left(\dfrac{x_n+2}{x_{n+1}-2}\right)$， 即 $a_{n+1}=2a_n$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=1$ 为首项，2 为公比的等比数列，故 $a_6=2^5=32$.故选 ACD.

12.AD.解析：设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，由 $y=x^2$，得 $y'=2x$，故 $k_A=2x_1$， $k_B=2x_2$，所以切线 PA 的方程为 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，即 $x_1^{\ 2}-2x_1x+y=0$，同理，切线 PB 的方程为 $x_2^{\ 2}-2x_2x+y=0$, 设 P 点坐标为 (x_0,y_0) , 所以 $x_1^{\ 2}-2x_1x_0+y_0=0$, $x_2^{\ 2}-2x_2x_0+y_0=0$,

从而 x_1,x_2 为方程 $x^2-2x_0x+y_0=0$ 的两根，故 $x_1+x_2=2x_0$， $x_1x_2=y_0$,

$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=x_1+x_2=\dfrac{1}{2}(k_A+k_B)$ ，故 k_A， k_{AB}， k_B 成等差数列，A 正确；

若 $x_0=\dfrac{1}{2}$，则 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=x_1+x_2=2x_0=1$，B 不正确；

若点 P 在抛物线的准线上，则 $y_0=-\dfrac{1}{4}$，$k_Ak_B=4x_1x_2=4y_0=-1$，故两切线垂直，则 ΔABP 为直角三角形，C 不正确；

若点 P 在直线 $y=2x-2$ 上，则 $y_0=2x_0-2$，直线 AB 的方程为 $y-x_1^2=2x_0(x-x_1)$，即 $y=2x_0x-2x_0x_1+x_1^2$，由于 $y_0=2x_0x_1-x_1^2$，故直线 AB 的方程为 $y=2x_0x-y_0$，即 $y=2x_0(x-1)+2$，从而过定点 $(1,2)$，故 D 正确.选 AD.

三、 填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13.5%.解析：A 表示“取到的是一件次品”，B_1，B_2，B_3 分别表示取到的产品是由甲、乙、丙车间生产的，显然 B_1,B_2,B_3 是样本空间 S 的一个划分，且有 $P(B_1)=0.45$，$P(B_2)=0.35$，$P(B_3)=0.2$.由于 $P(A|B_1)=0.02$，$P(A|B_2)=0.03$，设 $P(A|B_3)=m$，

由全概率公式得

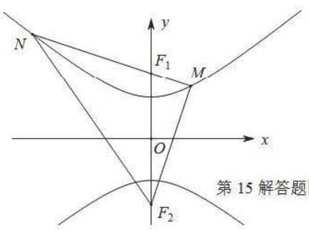
$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)=0.02\times0.45+0.03\times0.35+m\times0.2$$

而 $P(A)=2.95\%$，故 $m=5\%$.

14. $\dfrac{96\pi}{25}$. 解析：由条件知正方体的内切球半径大小为 2，设球心到平面 EB_1C_1 的距离为 d，

则得到 $\dfrac{1}{2}\times1\times4\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times5d$，解得 $d=\dfrac{2}{5}$.于是截面圆的半径大小为 $\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$，

故截面圆的面积大小为 $\dfrac{96}{25}\pi$.



第 15 解答题图

15. $y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$.解析：由双曲线的定义 $|MF_2|=2a+|MF_1|$

$|NF_2|=2a+|NF_1|,\therefore|MF_2|+|NF_2|=4a+|MF_1|+|NF_1|=4a+|MN|$

$\because|MF_2|+|NF_2|=2|MN|,\therefore|MN|=4a,$ 令 $|MF_1|=x,$

在 ΔMNF_2 中，$MF_2\perp MF_1,\therefore|MF_2|^2+|MN|^2=|NF_2|^2,\therefore(2a+x)^2+(4a)^2=(6a-x)^2$

$\therefore x=a,\therefore|MF_1|=a,|MF_2|=3a,$ 又在 $Rt\Delta F_1MF_2$ 中，$a^2+(3a)^2=(2c)^2,\therefore2c^2=5a^2$

4

又$c^2=a^2+b^2,\therefore 2b^2=3a^2,\therefore \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}}{3},\therefore y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x.$

16.$\frac{3}{\mathbf{e}}$. 解析：因为$f'(x)=a\mathbf{e}^{ax}-a$,所以不等式$f'(x)\geqslant 3(x^2-\frac{1}{x})\ln x$就是

$ax(\mathbf{e}^{ax}-1)\geqslant 3(x^3-1)\ln x$, 即 $ax(\mathbf{e}^{ax}-1)\geqslant(\mathbf{e}^{\ln x^3}-1)\ln x^3$. 两边是同构式. 构造函数 $g(x)=x(\mathbf{e}^x-1)$，$x\geqslant 0$ 则 $ax(\mathbf{e}^{ax}-1)\geqslant(\mathbf{e}^{\ln x^3}-1)\ln x^3$ 就是 $g(ax)\geqslant g(\ln x^3)$. 因为 $g'(x)=(\mathbf{e}^x-1)+x\mathbf{e}^x\geqslant 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增. 而 $ax,\ln x^3\in[0,+\infty)$，因此由 $g(ax)\geqslant g(\ln x^3)$得，$ax\geqslant\ln x^3$，$a\geqslant\frac{3\ln x}{x}$，$a\geqslant\frac{3}{\mathbf{e}}$.

故正实数a的最小值为$\frac{3}{\mathbf{e}}$.

17.解析：（I）由条件知$S_9=9a_5=81$，故$a_5=9$.

设数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d\neq 0$.

因a_2,a_5,a_{14}成等比数列，所以$a_5^2=a_2\cdot a_{14}$，

即$9^2=(9-3d)(9+9d)$，解得$d=2$，　……………………………3分

所以$a_n=a_5+(n-5)\times 2=9+2(n-5)=2n-1(n\in N^*)$.　……………5分

（II）由（1）知$S_n=n^2$，所以$b_n=\sqrt{1+\frac{1}{S_n}+\frac{1}{S_{n+1}}}=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

$$=\sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{[n(n+1)]^2}}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

故$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$.　……………………………………10分

18. 解析：（I）由于$2b\sin C\tan\frac{A}{2}=a$，有$2\sin B\sin C\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sin A$，即

$2\sin B\sin C\dfrac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\sin A$，$\dfrac{2\sin B\sin C\sin A}{1+\cos A}=\sin A$，$2\sin B\sin C=1+\cos A$，

$2\sin B\sin C=1-\cos(B+C)$，所以 $\cos(B-C)=1$.

由于 $-\pi<B-C<\pi$，且 $B=\dfrac{\pi}{6}$，故 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. …………6 分

（II）由（I）知 $b=c$.

$\because \cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{1}{8}, A\in(0,\pi), \therefore \cos A=\pm\dfrac{3}{4}$ …………8 分

当 A 为锐角时，$b^2+b^2-2b\cdot b\cos A=4^2, \therefore b^2=32, \therefore b=4\sqrt{2}.$ ……10 分

当 A 为钝角时，$b^2+b^2-2b\cdot b\cos A=4^2, \therefore b^2=\dfrac{32}{7}, \therefore b=\dfrac{4\sqrt{14}}{7}.$ ……12 分

19. 解析：（I）如图①，在梯形 $ABCD$ 中，作 $BE\perp CD$ 于点 E.

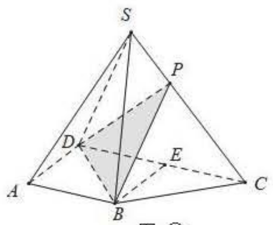
因为 $AB\,//\,CD$，$\angle BAD=90°$，$CD=2AB=2AD=2$，所以四边形 $ADEB$ 是正方形，

且 $BD=\sqrt{2}$，$DE=1$，所以 $EC=CD-DE=1$，$BC=\sqrt{BE^2+EC^2}=\sqrt{2}$.

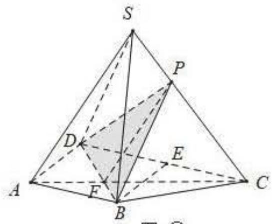
在 $\triangle SBD$ 中，$BD=\sqrt{2}$，$SB=BC=\sqrt{2}$，$SD=CD=2$，所以 $SD^2=SB^2+BD^2$，

所以 $SB\perp BD$.

在四棱锥 $S-ABCD$ 中，由 $SB\perp BC$，$SB\perp BD$，得 $SB\perp$ 平面 $ABCD$.



图①



图②

………… 5 分

（II）解法一、如图②，连接 AC 交 BD 于点 F，连接 PF.

因为 $SA\,//$ 平面 PBD，平面 SAC 经过 SA 与平面 PBD 相交于 PF，所以 $SA\,//\,PF$.

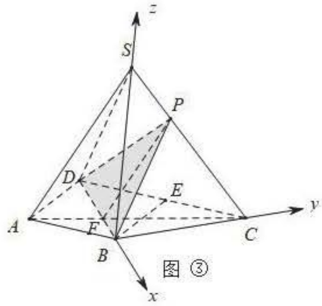
………… 6 分

因为 $AB\,//\,CD$，所以 $\triangle ABF\backsim\triangle CDF$，所以 $\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{1}{2}$.

由 $SA /\!/ PF$，得 $\dfrac{SP}{PC}=\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{1}{2}$. ………… 7 分

由 $BD=BC=\sqrt{2}$，$CD=2$，可知 $BD\perp BC$. 又由于（1）$SB\perp$ 平面 $ABCD$，故 BC、BD、BS 两两垂直，故可以点 B 为原点，以 BD、BC、BS 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，如图③所示. ………… 8 分

则 $C\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$S\left(0,0,\sqrt{2}\right)$，$D\left(-\sqrt{2},0,0\right)$，由 $\dfrac{SP}{PC}=\dfrac{1}{2}$，可得 $P\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，



图③

所以 $\overrightarrow{BD}=\left(-\sqrt{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

设平面 PBD 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=\left(x_0, y_0, z_0\right)$，则

$\begin{cases}-\sqrt{2}x_0=0,\\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}y_0+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}z_0=0\end{cases}$，取 $x_0=0$，$y_0=-2$，$z_0=1$，则 $\overrightarrow{m}=\left(0,-2,1\right)$.

又平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=\left(0,0,1\right)$，设平面 PBD 与平面 $ABCD$ 所成二面角大小为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\left|\overrightarrow{n}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2}\times 1}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

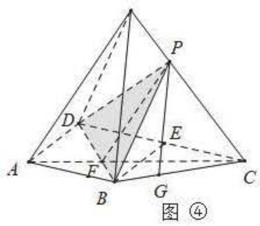
故平面 PBD 与平面 $ABCD$ 所成二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………… 12 分

解法二：由（1）$SB\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $SB\perp BD$.

因为 $BD=BC=\sqrt{2}$，$CD=2$，所以△ BCD 是直角三角形，$BD\perp BC$，所以 $BD\perp$ 平面 SBC. 又 PB 在平面 SBC 内，所以 $BD\perp PB$.

由 $BD\perp BC$，$BD\perp PB$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$BP\subset$ 平面 PBD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PBD=BD$，所以 $\angle PBC$ 就是平面 PBD 与平面 $ABCD$ 所成二面角的一个平面角. ………… 7 分

如图④，连接 AC 交 BD 于点 F，连接 PF，作 $PG\perp BC$ 垂足为点 G.



图④

因为 $SA /\!/$ 平面 PBD，平面 SAC 经过 SA 与平面 PBD 相交于

PF，所以$SA // PF$.

因为$AB // CD$，所以$\triangle ABF \backsim \triangle CDF$，故$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{1}{2}$.

由$SA // PF$，得$\dfrac{SP}{PC}=\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{1}{2}$. …………　8 分

在$\triangle SBC$中，$PG \perp BC$，$SB \perp BC$，所以$SB // PG$，所以$\dfrac{PG}{SB}=\dfrac{PC}{SC}=\dfrac{2}{3}$，

$\dfrac{BG}{BC}=\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{1}{3}$，所以$PG=\dfrac{2}{3}SB=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$，$BG=\dfrac{1}{3}BC=\dfrac{1}{3}\sqrt{2}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle PGB$中，$PB=\sqrt{BG^2+PG^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，

$\cos\angle PBG=\dfrac{BG}{PB}=\dfrac{\frac{1}{3}\sqrt{2}}{\frac{1}{3}\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以平面PBD与平面$ABCD$所成二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$…………　12 分

20.解析：（I）由条件知X的可能值为5，4，3，2. ……………………………1 分

其分布列为

X	5	4	3	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$

…………………4 分

$EX=5\times\dfrac{1}{9}+4\times\dfrac{7}{18}+3\times\dfrac{7}{18}+2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{2}$，

$DX=\left(5-\dfrac{7}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{9}+\left(4-\dfrac{7}{2}\right)^2\times\dfrac{7}{18}+\left(3-\dfrac{7}{2}\right)^2\times\dfrac{7}{18}+\left(2-\dfrac{7}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{25}{36}$. ………6 分

（II）设小 A 每天赢得的局数为Y，则$Y\sim B\left(30,\dfrac{1}{3}\right)$，

于是$P(Y=k)=C_{30}^{k}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{30-k}$. ……………………………………8 分

8
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

根据条件得$\begin{cases} C_{30}^{k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{30-k}\geqslant C_{30}^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{31-k} \\ C_{30}^{k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{30-k}\geqslant C_{30}^{k+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{29-k} \end{cases}$，解得$9\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant 10\frac{1}{3}$，

又因为$k\in Z$，所以$k=10$，因此在每天的30局四人赛中，小A赢得10局的比赛概率最大. ……………………………………12分

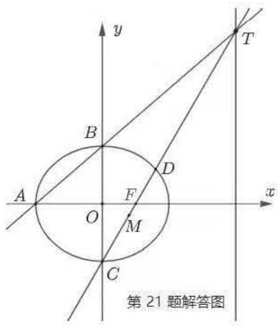
21. 解析：（I）由题意可知点A，B，C的坐标分别为$(-a,0)$，$(0,b)$，$(0,-b)$，所以直线AB的方程为：$y=\frac{b}{a}x+b$，直线CF的方程为：$y=\frac{b}{c}x-b$.

由$y=\frac{b}{a}x+b$和$y=\frac{b}{c}x-b$，消除y得，$x=\frac{2ac}{a-c}$，即为点T的横坐标. ………3分

因为点T在直线$l:x=\frac{a^2}{c}$上，所以$\frac{2ac}{a-c}=\frac{a^2}{c}$.

整理得$2c^2+ac-a^2=0$，所以离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. ………… 5分

（II）当椭圆E的离心率为$\frac{1}{2}$时，$a=2c$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$，所以椭圆$E$的方程为$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，即$3x^2+4y^2=12c^2$，直线$CF$的方程为：$y=\sqrt{3}(x-c)$.



第21题解答图

$\begin{cases} 3x^2+4y^2=12c^2, \\ y=\sqrt{3}(x-c) \end{cases}$，消去$y$，化简整理得$x(5x-8c)=0$，所以点$D$的横坐标为$\frac{8c}{5}$，纵坐标为$\frac{3\sqrt{3}c}{5}$.

因为点C的坐标为$(0,-\sqrt{3}c)$，所以CD中点M的坐标为$\left(\frac{4c}{5},-\frac{\sqrt{3}c}{5}\right)$. ……… 8分

又由(1)知点T的横坐标为$\frac{2ac}{a-c}=\frac{4c^2}{c}=4c$，所以点$T$的纵坐标为$\sqrt{3}(4c-c)=3\sqrt{3}c$.

9

所以 $|TM|=\sqrt{\left(4c-\frac{4c}{5}\right)^2+\left(3\sqrt{3}c+\frac{\sqrt{3}c}{5}\right)^2}=\frac{32c}{5}$，

$|CD|=\sqrt{\left(-\frac{8c}{5}\right)^2+\left(-\sqrt{3}c-\frac{3\sqrt{3}c}{5}\right)^2}=\frac{16c}{5}$，

故 $\frac{|TM|}{|CD|}=2$，为定值. ………… 12 分

22.解析：（I）因为 $f'(x)=\frac{a}{x}+bx(2-x)\mathbf{e}^{1-x}$，所以 $f'(2)=\frac{a}{2}$. …………2 分

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程是 $y=x+\ln 2$,

所以 $f'(2)=1$, $f(2)=a\ln 2+4b\mathbf{e}^{-1}$, 即 $\frac{a}{2}=1$, $a\ln 2+\frac{4b}{e}=2+\ln 2$,

解得 $a=2$, $b=\frac{(2-\ln 2)\mathbf{e}}{4}$. …………4 分

（II）由 $f'(x)=\frac{\mathbf{e}}{x}+bx(2-x)\mathbf{e}^{1-x}=0$ 得，$\frac{\mathbf{e}^x}{x}=bx(x-2)$.显然 $x\neq 2$，$x>0$.

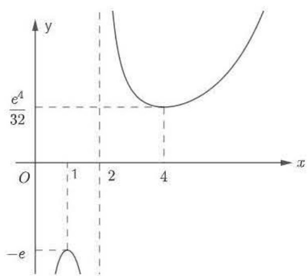
因此 $\frac{\mathrm{e}^x}{x^2(x-2)}=b$. …………5 分

令 $g(x)=\frac{\mathbf{e}^x}{x^3-2x^2}$，$x>0$ 且 $x\neq 2$，则 $g'(x)=\frac{(x^2-5x+4)x\mathbf{e}^x}{(x^3-2x^2)^2}$.

解方程 $x^2-5x+4=0$ 得，$x_1=4, x_2=1$ …………7 分

因此函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(4,+\infty)$ 内单增，在 $(1,2)$ 和 $(2,4)$ 内单减，且极大值为 $g(1)=-\mathbf{e}$，极小值为 $g(4)=\frac{\mathbf{e}^4}{32}$. …………9 分

由图象可知,当 $b>\frac{\mathbf{e}^4}{32}$ 或 $b<-\mathbf{e}$ 时，直线 $y=b$ 与曲线 $y=g(x)$ 分别有两个交点，即函数 $f'(x)$ 恰有两个零点.



故 b 的取值范围是 $(-\infty,-\mathbf{e})\cup(\frac{\mathbf{e}^4}{32},+\infty)$. ……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

自主选拔在线 微信号：zizzsw