衡中同卷

参考答案及解析

河北衡水中学2020届全国高三第三次联合考试(Ⅰ)·文科数学

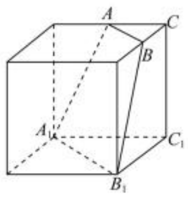
一、选择题

1. D 【解析】因为 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|x>1\}$，所以 $A\cap B=\{2\}$.故选D.

2. B 【解析】由 $\frac{-m+3i}{2-i}=n+2i(m,n\in\mathbf{R})$ 可得 $-m+3i=(2n+2)+(4-n)i$，所以 $\begin{cases}-m=2n+2,\\3=4-n,\end{cases}$ 解得 $m=-4$，$n=1$，$z=-4+i$，对应的点位于第二象限.故选B.

3. B 【解析】由题意可得样本容量为 $\frac{30-18}{0.1}=120$，所以A历史类的人数为 $120-42-18-30=30$.故选B.

4. C 【解析】由三视图可知，该几何体为三棱台，它在正方体中的直观图如图所示.则它的表面积为 $\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{(1+2)}{2}\times2\times2+\frac{(\sqrt{2}+2\sqrt{2})}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=13$.故选C.



5. A 【解析】根据定义，可以列举出不超过20的孪生素数为3和5，5和7，11和13，17和19，它们的和依次是8，12，24，36.构成等差数列的三个数分别是12，24，36，它们的和是72.故选A.

6. A 【解析】易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，$e^x>0$.又因为当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$\ln|x|>0$，所以 $f(x)>0$，排除选项C，D；又 $f(x)$ 不是偶函数，排除选项B.故选A.

7. C 【解析】由题意知，甲和丙的说法矛盾，因此两人中有一人判断正确，故乙和丁都判断错误，乙获奖，丙判断正确.故选C.

8. B 【解析】由 $\tan A+\tan B=\frac{2\sin C}{\cos A}$，得 $\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=\frac{2\sin C}{\cos A}$，即 $\frac{\sin C}{\cos B}=2\sin C$.因为 $\sin C\neq0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，$B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，因此 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{2}$.故选B.

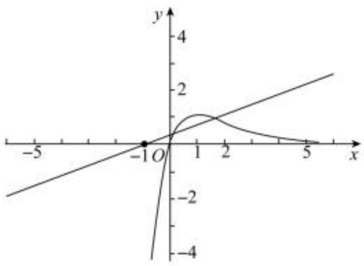
9. C 【解析】由题意可知 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{7}{3}$.故选C.

10. A 【解析】因为 $\frac{\pi}{24}$，$\frac{\pi}{6}$ 是相邻的极大值点和零点，所以 $\omega=\frac{2\pi}{4\times\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{24}\right)}=4$.因为 $4\times\frac{\pi}{24}+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$.将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 θ 个单位长度，得到函数 $g(x)=2\cos\left[4(x+\theta)-\frac{\pi}{6}\right]=2\cos\left(4x+4\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.因为函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称，所以 $4\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 θ 的值可以为 $\frac{\pi}{6}$.故选A.

11. D 【解析】设 $|BF_1|=m$，则由 $\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，得 $|AF_1|=2m$.由于 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，$|BF_2|-|BF_1|=2a$，所以 $|AF_2|=2a+2m$，$|BF_2|=m+2a$.则 $\triangle BF_1F_2$ 的周长为 $|BF_1|+|BF_2|+|F_1F_2|=2m+2a+2c$，$\triangle AF_1F_2$ 的周长为 $|AF_1|+|AF_2|+|F_1F_2|=4m+2a+2c$.根据题意得 $\frac{4m+2a+2c}{2m+2a+2c}=\frac{5}{4}$，得 $m=$

$\frac{a+c}{3}$.又因为 $\cos\angle AF_1F_2+\cos\angle BF_1F_2=0$,所以 $3c^2-3a^2-4am=0$,代入 $m=\frac{a+c}{3}$,可得 $e=\frac{13}{9}$.故选 D.

12. C 【解析】由题意知函数 $h(x)=\frac{3x}{e^x}-ax-a$ 有两个互异的零点 m,n,等价于函数 $f(x)=ax+a$ 与函数 $g(x)=\frac{3x}{e^x}$ 的图象有两个不同的交点.$g(x)=\frac{3x}{e^x}$,$g'(x)=\frac{3(1-x)}{e^x}$,令 $g'(x)>0$,可得 $x<1$;令 $g'(x)<0$,可得 $x>1$,所以,$x=1$ 是函数 $g(x)$ 的极大值点,也是最大值点,且 $g(1)=\frac{3}{e}$.由 $f(x)=ax+a$,可知 $f(x)$ 的图象为过定点 $(-1,0)$ 的一条直线,如图所示.若满足 $f(x)$,$g(x)$ 的图象有两个不同的交点,且在区间 (m,n) 上有且仅有一个正整数,则 $\begin{cases}a>0,\\ f(1)<g(1),\\ f(2)\geqslant g(2),\end{cases}$ 解得 $\frac{2}{e^2}\leqslant a<\frac{3}{2e}$.故选 C.

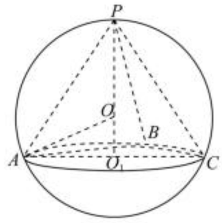


二、填空题

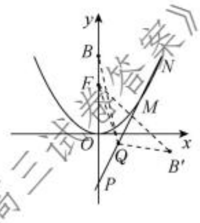
13. 2^{n-1} 【解析】由 $S_1=1$,$S_4=5S_2$,可得 $1+q^2=5$,解得 $q=2$ 或 $q=-2$.因为 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列,所以 $q=2$,所以 $a_n=2^{n-1}$.

14. $-\frac{1}{3}$ 【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{1}{3}$.

15. $\frac{16\pi}{3}$ 【解析】如图,当 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形且平面 $PAC\perp$ 平面 ABC 时,三棱锥的体积最大.此时,外接球的球心为等边 $\triangle PAC$ 的中心.在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1A$ 中,$R=OA=\sqrt{O_1A^2+OO_1^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{48\pi}{9}=\frac{16\pi}{3}$.



16. $\sqrt{17}$ 【解析】设直线 l 的方程为 $y=kx-2$,联立方程组 $\begin{cases}x=\frac{y+2}{k},\\ x^2=8y,\end{cases}$ 得 $y^2+(4-8k^2)y+4=0$,则 $y_1+y_2=8k^2-4$.根据抛物线的定义可知 $|MF|+|NF|=y_1+y_2+4=32$,解得 $k=\pm2$,取 $k=2$($k=-2$ 时所得结果一致),则直线 l 的方程为 $y=2x-2$.设点 B 关于直线 l 的对称点 $B'(x_0,y_0)$,根据垂直平分性,可列出方程 $\begin{cases}\frac{y_0+3}{2}=x_0-2,\\ \frac{y_0-3}{x_0}=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $B'(4,1)$,此时线段 FB' 与直线 l 的交点,即为使得 $|QF|+|QB|$ 取得最小值的点.最小距离为 $|FB'|=\sqrt{17}$.



三、解答题

(一)必考题

17. 解:(1)由 a_n+1 是 4 和 S_n 的等比中项,

知 $(a_n+1)^2=4S_n$ ①,

故当 $n\geqslant2$ 时,$(a_{n-1}+1)^2=4S_{n-1}$ ②,　　(2 分)

由①－②,得 $(a_n-1)^2=(a_{n-1}+1)^2$,

即 $a_n-1=a_{n-1}+1$ 或者 $a_n-1+(a_{n-1}+1)=0$(舍去),则可得 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant2)$,　　(4 分)

则 $\{a_n\}$ 为等差数列,且 $(a_1+1)^2=4S_1$,得 $a_1=1$,

所以 $a_n=2n-1$.　　(6 分)

(2) $b_n=\frac{1}{2n\cdot(2n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,　　(8 分)

所以 $T_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$. (12 分)

18. **解**:(1)根据频率分布直方图可得第五组的频数为 $100\times[1-(0.005+0.0075+0.0145+0.02)\times20]=6$,

且根据男生女生的比例是 2∶1,得男生 4 人,女生 2 人.

设男生为 a,b,c,d,女生为 A,B,则从 6 人中抽取 2 人的基本事件包括 $(a,b),(a,c),(a,d),(a,A),(a,B),(b,c),(b,d),(b,A),(b,B),(c,d),(c,A),(c,B),(d,A),(d,B),(A,B)$,共 15 个;

记"选出的 2 人中恰好是 1 男 1 女"为事件 C,事件 C 中包括基本事件 $(a,A),(a,B),(b,A),(b,B),(c,A),(c,B),(d,A),(d,B)$,共 8 个, (4 分)

则 $P(C)=\frac{8}{15}$.

所以选出的 2 人中恰好是 1 男 1 女的概率为 $\frac{8}{15}$. (6 分)

(2)K^2 的观测值 $k=\frac{100\times(30\times10-15\times45)^2}{75\times25\times45\times55}\approx3.030>2.706$, (10 分)

所以有 90% 的把握认为是否了解篮球运动与性别有关. (12 分)

19. (1)**证明**:在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{3}$,$BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=2\sqrt{3}$, (2 分)

在 $\triangle BEC$ 中,$BE^2+BC^2=12+4=16=CE^2$,

所以 $BE\perp CB$.

又因为 $DE\perp$ 平面 $ABCE$,$BC\subset$ 平面 $ABCE$,

所以 $DE\perp BC$,$DE\cap BE=E$,

所以 $BC\perp$ 平面 BDE,$BC\subset$ 平面 MBC,

所以平面 $MBC\perp$ 平面 BDE. (6 分)

(2)**解**:$V_{E\text{-}ANC}=V_{N\text{-}AEC}$,$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot CE=2\sqrt{3}$,

设点 N 到平面 AEC 的距离为 h,则

$V_{N\text{-}AEC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AEC}\cdot h=\frac{4\sqrt{3}}{9}$, (10 分)

所以 $h=\frac{2}{3}$.在 $\triangle BED$ 中,$DE\perp$ 平面 AEC,

所以存在点 N,使得 $\frac{BN}{BD}=\frac{2}{3}$,

则点 N 是线段 BD 靠近 D 的三等分点. (12 分)

20. **解**:(1)因为 $\triangle ACF_2$ 的周长为 4,

所以 $4=|AC|+|CF_2|+|AF_2|=|AF_1|+|AF_2|=2a$, (2 分)

所以 $a=2$.设椭圆的半焦距为 c,

所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,可得 $c=1$.

又 $b^2=a^2-c^2$,得 $b^2=3$.

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. (6 分)

(2)由题意得 $\frac{S_{\triangle ACF_2}}{S_{\triangle BCF_2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|CF_2|\cdot|AF_2|\cdot\sin\angle AF_2C}{\frac{1}{2}\cdot|CF_2|\cdot|BF_2|\cdot\sin\angle BF_2C}=\frac{|AF_2|}{|BF_2|}=\frac{5}{3}$,

所以 $\overrightarrow{AF_2}=\frac{5}{3}\overrightarrow{F_2B}$. (8 分)

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

所以 $(1-x_1,-y_1)=\frac{5}{3}(x_2-1,y_2)$,

所以 $y_1=-\frac{5}{3}y_2$ ①.

设直线 AB:$my=x-1$,联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ my=x-1,\end{cases}$

得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,

$\Delta=(6m)^2-4\times(3m^2+4)\times(-9)>0$.

所以 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$ ②,$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$ ③, (10 分)

由①②③得 $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为点 A 在第一象限,所以 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以直线 AF_2 的方程为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}y=x-1$,

即 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$. (12 分)

21. (1)**解**:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$; (2 分)

当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$；

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上为减函数；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，无极大值点.

极小值为 $f(1)=-\dfrac{3}{2}$，无极大值. （4 分）

(2)**证明**：函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$g'(x)=4x-4+\dfrac{4a}{x}=\dfrac{4x^2-4x+4a}{x}$. （6 分）

由题意知 x_1,x_2 是函数 $g(x)$ 不相同的两个极值点，

所以 x_1,x_2 是方程 $x^2-x+a=0$ 的两个不相等的正根，

所以 $\begin{cases}\Delta=1-4a>0,\\ x_1+x_2=1>0,\\ x_1x_2=a>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\dfrac{1}{4}$， （8 分）

所以 $(x_1+x_2)[g(x_1)+g(x_2)]=[g(x_1)+g(x_2)]=2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-4(x_1+x_2)+4a\ln(x_1\cdot x_2)=4\left(a\ln a-a-\dfrac{1}{2}\right)=4f(a)$.

由(1)知，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 上单调递减，

所以 $f(a)>f\left(\dfrac{1}{4}\right)$， （10 分）

所以 $(x_1+x_2)[g(x_1)+g(x_2)]>4f\left(\dfrac{1}{4}\right)$. （12 分）

（二）选考题

22. **解**：(1)根据公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y,\end{cases}$

可得曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-3)^2+(y+1)^2=16$， （2 分）

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=10$. （4 分）

(2)由题意知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ （t 为参数）.

将直线 l 的参数方程代入曲线 C_2：$(x-2)^2+y^2=10$，

整理得 $t^2-3\sqrt{2}t-1=0$，

$\Delta=(-3\sqrt{2})^2-4\times1\times(-1)=22>0$. （8 分）

设 M,N 两点对应的参数分别为 t_1,t_2，

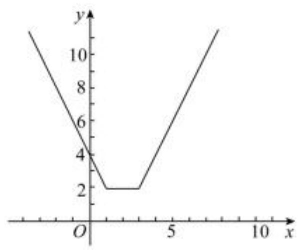
则 $|PM|\cdot|PN|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=1$. （10 分）

23. **解**：(1)解法一：原不等式等价于 $|x-1|+|x-3|\leqslant4$，

设 $g(x)=|x-1|+|x-3|=\begin{cases}4-2x,x\leqslant1,\\ 2,1<x<3,\\ 2x-4,x\geqslant3,\end{cases}$ （4 分）

图象如图所示，

所以不等式 $g(x)\leqslant4$ 的解集为 $\{x|0\leqslant x\leqslant4\}$. （6 分）



解法二：原不等式等价于 $|x-1|+|x-3|\leqslant4$.

①当 $x\leqslant1$ 时，解不等式 $-(x-1)-(x-3)\leqslant4$，得 $x\geqslant0$，所以 $0\leqslant x\leqslant1$；

②当 $1<x<3$ 时，解不等式 $(x-1)-(x-3)\leqslant4$，得 $x\in\mathbf{R}$，所以 $1<x<3$；

③当 $x\geqslant3$ 时，解不等式 $x-1+x-3\leqslant4$，得 $x\leqslant4$，所以 $3\leqslant x\leqslant4$. （4 分）

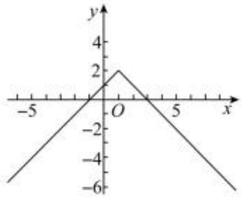
综上所述，不等式的解集为 $[0,4]$. （6 分）

(2)函数 $f(x)$ 的图象如图所示.

若满足 $f(a-1)<f(2a)$，只需满足 $|(a-1)-1|>|2a-1|$ 即可， （8 分）

解得 $-1<a<1$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-1,1)$. （10 分）



关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。