

江苏省扬州中学 2022-2023 学年度 1 月月考试题

高三数学

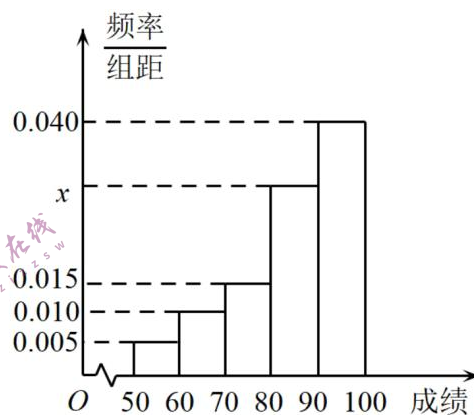
2023.01

试卷满分：150 分， 考试时间：120 分钟

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每题给出的四个选项中，只有一项是最符合题意的.（请将所有选择题答案填到答题卡的指定位置中.）

1. 已知复数 $z = i^3$ （ i 为虚数单位），则 $\frac{2}{z} - z^2$ 的共轭复数的模是（ ）
 A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$
2. 已知集合 $A = \{x | \ln(x+1) < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} | y = 3\sin x\}$, 则 $A \cap B =$ （ ）
 A. $\{0, 1, 2, 3\}$ B. $\{0, 3\}$ C. $\{3\}$ D. \emptyset
3. 设 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, 则“ a_1, a_2, a_3 成等比数列”是“ $(a_1^2 + a_2^2)(a_2^2 + a_3^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3)^2$ ”的（ ）
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 某中学全体学生参加了数学竞赛，随机抽取了 400 名学生进行成绩统计，发现抽取的学生的成绩都在 50 分至 100 分之间，进行适当分组后（每组为左闭右开的区间），画出频率分布直方图如图所示，每组数据以组中值（组中值 = (区间上限 + 区间下限) / 2）计算，下列说法正确的是（ ）



- A. 直方图中 x 的值为 0.035
- B. 在被抽取的学生中，成绩在区间 $[70, 80)$ 的学生数为 30 人
- C. 估计全校学生的平均成绩为 83 分
- D. 估计全校学生成绩的样本数据的 80% 分位数约为 95 分

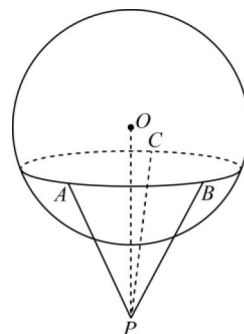
5. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cos 2\alpha$, 则 $\sin 2\alpha =$ （ ）

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中， M 为双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 右支上的一个动点，若点 M 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离大于 m 恒成立，则实数 m 的最大值为（ ）

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

7. 如图是一个由三根细棒 PA 、 PB 、 PC 组成的支架，三根细棒 PA 、 PB 、 PC 两两所成的角都为 60° ，一个半径为 1 的小球放在支架上，则球心 O 到点 P 的距离是（ ）

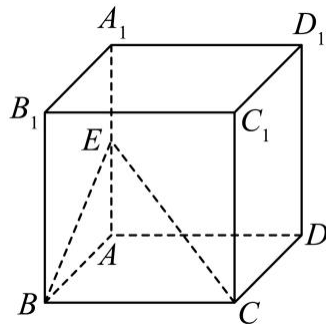


- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbb{R} , 且 $f(5x+2)$ 是偶函数, 记 $g(x) = f'(x)$, $g(x+1)$ 也是偶函数, 则 $f'(2022)$ 的值为 ()
- A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

二、多项选择题: 全科免费下载公众号《高中僧课堂》本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分. (请将所有选择题答案填到答题卡的指定位置中.)

9. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 AA_1 的中点, 则 ()
- A. $A_1D_1 //$ 平面 BEC
- B. $AB_1 \perp$ 平面 BEC
- C. 平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 BEC
- D. 直线 DD_1 与平面 BEC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$



10. 已知函数 $f(x) = \sin^2(x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{3}$, 则 ()
- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. $f(0) = \frac{1}{4}$
- C. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 上单调递增
- D. $|x| \geq f(x - \frac{\pi}{6})$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = (\sqrt{a_n + 2} + 1)^2 - 2$, 则关于数列 $\{a_n\}$ 的说法正确的是 ()
- A. $a_2 = 5$
- B. 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列
- C. $a_n = n^2 + 2n - 1$
- D. 数列 $\{\frac{1}{a_n + 1}\}$ 的前 n 项和小于 $\frac{3}{4}$

12. 已知函数 $f(x) = |\sin x|$, $g(x) = kx$ ($k > 0$), 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的公共点个数为 n , 且这些公共点的横坐标从小到大依次为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则下列说法正确的有 ()
- A. 若 $n = 1$, 则 $k > 1$
- B. 若 $n = 3$, 则 $\frac{2}{\sin 2x_3} = x_3 + \frac{1}{x_3}$
- C. 若 $n = 4$, 则 $x_1 + x_4 < x_2 + x_3$
- D. 若 $k = \frac{2}{2023\pi}$, 则 $n = 2024$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. (请将所有填空题答案填到答题卡的指定位置中.)

13. 已知 $(2x^2 + \frac{1}{ax^2})^5$ 展开式中的各项系数和为 243, 则其展开式中含 x^2 项的系数为 _____.

14. 已知 $|\vec{a}| = \sqrt{2}, \vec{b} = (-1, \sqrt{3}), (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 _____.

15. 已知 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点, P 为椭圆 C 上一点 (P 不在 y 轴上), $\triangle PF_1F_2$ 的重心为 G , 内心为 M , 且 $GM \parallel F_1F_2$, 则椭圆 C 的离心率为 _____.

16. 对于函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 设 $\alpha \in \{x | f(x) = 0\}, \beta \in \{x | g(x) = 0\}$, 若存在 α, β , 使得 $|\alpha - \beta| < 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为“零点相邻函数”. 若函数 $f(x) = e^{x-1} + x - 2$ 与 $g(x) = x^2 - ax - a + 3$ 互为“零点相邻函数”, 则实数 a 的取值范围为 _____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. (请将所有解答题答案填到答题卡的指定位置中.)

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足, $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot (-1)^n$.

(1) 若 $a_1 = 1$, 数列 $\{a_{2n}\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 求 a_1 .

18. 记锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\tan B = \frac{\sin A + \sin C}{\cos A + \cos C}$.

(1) 求 B ;

(2) 求 $\frac{a(c-a)}{b^2}$ 的取值范围.

19. 密室逃脱可以因不同的设计思路衍生出不同的主题, 从古墓科考到蛮荒探险, 从窃取密电到逃脱监笼, 玩家可以选择自己喜爱的主题场景在规定时间内完成任务, 获取奖励. 李华参加了一次密室逃脱游戏, 他选择了其中一种模式, 该游戏共有三关, 分别记为 A, B, C ,

他们通过三关的概率依次为: $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. 若其中某一关不通过, 则游戏停止, 游戏不通过.

只有依次通过 A, B, C 三道关卡才能顺利通关整个游戏, 并拿到最终奖励. 现已知参加一次游戏的报名费为 150 元, 最终奖励为 400 元. 为了吸引更多的玩家来挑战该游戏, 商家推出了一项补救活动, 可以在闯关前付费购买通关币. 游戏中, 若某关卡不通过, 则自动使用一枚通关币通过该关卡进入下一关. 购买一枚通关币需另付 100 元, 游戏结束后, 剩余的未使用的通关币半价回收.

(1) 若李华同学购买了一枚通关币, 求他通过该游戏的概率.

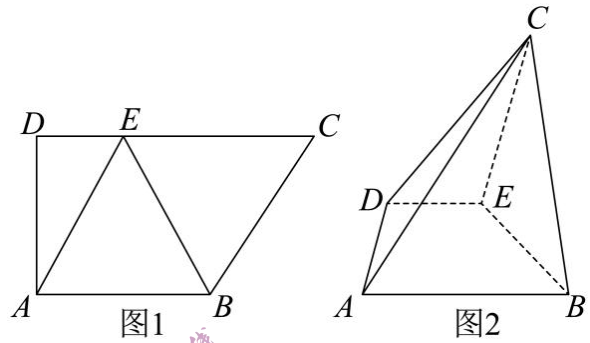
(2) 若李华同学购买了两枚通关币, 求他最终获得的收益期望值. (收益等于所得奖励减去

报名费与购买通关卡所需费用)。

20. 图1是直角梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\angle D = 90^\circ$, $AB = 2$, $DC = 3$, $AD = \sqrt{3}$, $\overline{CE} = 2\overline{ED}$, 以 BE 为折痕将 $\triangle BCE$ 折起, 使点 C 到达 C_1 的位置, 且 $AC_1 = \sqrt{6}$, 如图2.

(1)求点 D 到平面 BC_1E 的距离;

(2)若 $\overline{DP} = \frac{1}{3}\overline{DC_1}$, 求二面角 $P-BE-A$ 的大小.



21. 已知点 $Q(1,2)$ 是焦点为 F 的抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)设点 P 是该抛物线上一动点, 点 M, N 是该抛物线准线上两个不同的点, 且 $\triangle PMN$ 的内切圆方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 求 $\triangle PMN$ 面积的最小值.

22. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + a$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最大值为0,

①求 a 的取值范围;

②若 $f(x) \leq kx^2 - 3ax + 1$ 恒成立, 求正整数 k 的最小值.