衡中同卷 参考答案及解析 新高考版

2022—2023 学年度上学期高三年级六调考试·数学

一、选择题

1. D 【解析】由题意得样本中女生人数为 $68\times\frac{160}{180+160}=32$.

2. A 【解析】由题意得 $z=\frac{2i-a}{i^2}=a-2i$,所以 $|z|=\sqrt{a^2+(-2)^2}=\sqrt{a^2+4}$.令 $|z|>\sqrt5$,解得 $a>1$ 或 $a<-1$,故"$a>1$"是"$|z|>\sqrt5$"的充分不必要条件.

3. B 【解析】由题意得 $\ln y=\ln(ce^{kx})=\ln c+kx$,设 $z=\ln y$,可得 $z=\ln c+kx$,又经验回归方程为 $\hat z=2x-1$,所以 $\ln c=-1,k=2$,故 $c=\frac{1}{e},k=2$.

4. C 【解析】由题意得 $|a-b|=\sqrt{a^2-2a\cdot b+b^2}=\sqrt{1^2-2\times1\times\sqrt2\cos\theta+(\sqrt2)^2}=1$,解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt2}{2}$.又 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt2}{2}$,所以 $a\odot b=\left|\frac{\sqrt2}{2}a+\frac{\sqrt2}{2}b\right|=\sqrt{\frac12a^2+a\cdot b+\frac12b^2}=\sqrt{\frac12+1+\frac12\times2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

5. C 【解析】$\left(x^3+\frac1x-1\right)^5$ 可看作 5 个 $\left(x^3+\frac1x-1\right)$ 相乘,展开式中 x^3 可由 2 种情况获得:①从中取 2 个式子提供 x^3,3 个式子提供 $\frac1x$,则可得到 $C_5^2(x^3)^2C_3^3\left(\frac1x\right)^3=10x^3$;②从中取 1 个式子提供 x^3,4 个式子提供 -1,则可得到 $C_5^1(x^3)^1C_4^4(-1)^4=5x^3$,故 $\left(x^3+\frac1x-1\right)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 $10+5=15$.

6. B 【解析】由题意得从左到右数,不管数到哪个格子,总有黑色格子不少于白色格子包含的情况有 3 种:①全染黑色,有 1 种方法;②第 1 个格子染黑色,另外 4 个格子中有 1 个格子染白色,剩余的格子都染黑色,有 $C_4^1=4$ 种染色方法;③第 1 个格子染黑色,另外 4 个格子中有 2 个格子染白色,剩余的格子都染黑色,有 $C_4^2-1=5$(种)染色方法,所以从左到右数,不管数到哪个格子,总有黑色格子不少于白色格子的染色方法有 $1+4+5=10$(种).

7. D 【解析】6 名同学分别选修一门课程,每门课程至少有一名同学选修,共有 $\left(\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}+C_6^4+C_6^3C_3^2C_1^1\right)A_3^3=540$(种)选课方法,恰有 2 名同学选修传统体育的选课方法有 $C_6^2\left(C_4^1+\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right)\cdot A_2^2=210$(种),所以恰有 2 名同学选修传统体育的概率 $P=\frac{210}{540}=\frac{7}{18}$.

8. C 【解析】由题意知 $a>0,b>0,c>0$,由 $\frac{\ln a}{e^a}=\frac{\ln b}{b}=-\frac{\ln c}{c}<0$,得 $0<a<1,0<b<1,c>1$.设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(0<x<1)$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$,$f(x)$ 单调递增.因为 $e^x>x+1>x$,所以 $e^a>a>0$,又 $\ln a<0$,所以 $\frac{\ln a}{e^a}>\frac{\ln a}{a}$,故 $\frac{\ln b}{b}>\frac{\ln a}{a}$,所以 $f(b)>f(a)$,则 $b>a$,故 $0<a<b<1<c$,即 $a<b<c$.

二、选择题

9. AC 【解析】由两个统计图可得参加演讲社团的人数为 50,占选取的学生总人数的 10%,所以选取的学生的总人数为 $50\div10\%=500$,故 A 正确;合唱社团的人数为 200,则合唱社团的人数占样本总量的 $\frac{200}{500}\times100\%=40\%$,故 B 错误;选取的学生中参加机器人社团的人数占样本总量的 $1-40\%-20\%-15\%-10\%=15\%$,所以选取的学生中参加机器人社团的人数为 $500\times15\%=75$,故 C 正确;选取的学生中参加合唱社团的人数为 200,参加机器人社团的人数为 75,故 D 错误. 更多试题与答案,关注微信公众号:三晋高中指南

10. BCD 【解析】二项式 $\left(2\sqrt x-\frac{1}{\sqrt x}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^k(2\sqrt x)^{8-k}\left(-\frac{1}{\sqrt x}\right)^k=(-1)^k2^{8-k}\cdot C_8^kx^{4-k}$,对于 A,令 $4-k=0$,得 $k=4$,故常数项是第 5 项,故 A 错误;对于 B,令 $x=1$,则所有项的系数和是 $(2-1)^8=1$,故 B 正确;对于 C,展开式共 9 项,则第 5 项的二项式系数最大,故 C 正确;对于 D,设第 $(k+1)$ 项的系数的绝对值最大,则 $\begin{cases}C_8^k\cdot2^{8-k}\geqslant C_8^{k-1}\cdot2^{9-k},\\C_8^k\cdot2^{8-k}\geqslant C_8^{k+1}\cdot2^{7-k},\end{cases}$ 解得 $2\leqslant k\leqslant3$,又 $k\in\mathbf Z$,所以 $k=2$ 或 $k=3$,当 $k=2$ 时,$T_3=1\,792x^2$;当 $k=3$ 时,$T_4=-1\,792x$,所以第 4 项的系数最小,故 D 正确.

11. ABD【解析】设 2 个红球分别为 a_1,a_2，2 个白球分别为 b_1,b_2，则样本空间为 $\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_1),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,b_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_2,b_1)\}$，共 12 个基本事件，事件 $A=\{(a_1,a_2),(a_2,a_1),(b_1,b_2),(b_2,b_1)\}$，共4 个基本事件，事件 $B=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_1),(a_2,b_1),(a_2,b_2)\}$，共 6 个基本事件，事件$C=\{(a_2,a_1),(b_1,a_1),(b_2,a_1),(a_1,a_2),(b_1,a_2),(b_2,a_2)\}$，共 6 个基本事件，事件 $D=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2)\}$，共 8 个基本事件. 对于 A，因为 $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，所以 $P(A)P(B)=P(AB)$ 成立，则 A 与 B 相互独立，故 A 正确；对于 B，因为 $A\cap D=\varnothing$，$A\cup D=\Omega$，所以 A 与 D 是对立事件，故 B 正确；对于 C，因为 $B\cap C\neq\varnothing$，所以 B 与 C 不互斥，故 C 错误；对于 D，因为 $P(D)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(BD)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，所以 $P(B)P(D)=P(BD)$ 成立，则 B 与 D 相互独立，故 D 正确.

12. BC【解析】由题意得 $P_1=0$，$P_2=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$，$P_3=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$，故 A 错误、B 正确；$S_n$ 被 3 除的余数有 3 种情况，分别为 0，1，2，所以 $P_{n+1}=\frac{1}{2}(1-P_n)$，则 $P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$，所以 $P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，即 $P_n=-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$，所以 $P_{11}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}+\frac{1}{3}=\frac{341}{1024}$，故 C 正确；当 $n=6$ 时，$P_6=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{3}=\frac{11}{32}>\frac{1}{3}$，故 D 错误.

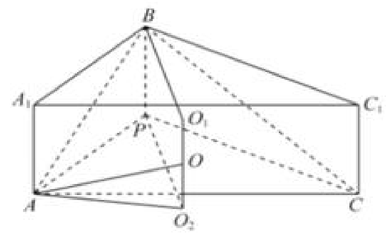
三、填空题

13. $\frac{4}{5}m$【解析】样本数据 x_1,x_2,x_3,x_4 的平均数和方差均为 m，在该组数据中加入一个数 m，则新样本数据的平均数 $\overline{x}=\frac{1}{5}\times(4\times m+m)=m$，方差 $s^2=\frac{1}{5}\times[4\times m+(m-m)^2]=\frac{4}{5}m$.

14. 0.957【解析】设 A_i="取到的产品来自第 i 批"$(i=1,2)$，B="取到合格品"，则 $P(A_1)=0.3$，$P(A_2)=0.7$，$P(B|A_1)=0.95$，$P(B|A_2)=0.96$，由全概率公式得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.3\times0.95+0.7\times0.96=0.957$.

15. $\frac{n-1}{2}+\frac{1}{n+2}$【解析】由 $\frac{1}{(n+1)C_n^k}+\frac{1}{(n+1)C_n^{k+1}}=\frac{1}{nC_{n-1}^k}$，得 $\frac{1}{(n+2)C_{n+1}^1}+\frac{1}{(n+2)C_{n+1}^2}=\frac{1}{(n+1)C_n^1}$，所以 $\frac{1}{(n+2)C_{n+1}^2}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$，所以 $a_n=\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]+\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$，所以 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}=\frac{n-1}{2}+\frac{1}{n+2}$.

16. 22π【解析】由题意得 $PA^2+PB^2=AB^2$，所以$PA\perp PB$，且$\angle PAB=45°$，所以$\angle PAC=\angle PAB=45°$. 在$\triangle PAC$中，由余弦定理得 $PC^2=AC^2+PA^2-2AC\cdot PA\cdot\cos\angle PAC=16+2-2\times4\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10$，所以 $PB^2+PC^2=2+10=12=BC^2$，所以 $PB\perp PC$. 又 $PA\cap PC=P$，$PA,PC\subset$ 平面 PAC，所以 $PB\perp$ 平面 PAC，故可将三棱锥 $P\text{-}ABC$ 补为直三棱柱 $BA_1C_1\text{-}PAC$，如图所示，则直三棱柱 $BA_1C_1\text{-}PAC$ 的外接球即为三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球. 设$\triangle PAC$ 外接圆圆心为 O_2，$\triangle A_1BC_1$ 的外接圆圆心为 O_1，则直三棱柱的外接球球心为 O_1O_2 的中点 O，连接 OA，则 OA 即为外接球的半径. 在$\triangle PAC$ 中，根据正弦定理可得 $2O_2A=\frac{PC}{\sin\angle PAC}=\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{5}$，所以 $O_2A=\sqrt{5}$，所以 $OA^2=OO_2^2+O_2A^2=\left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2+O_2A^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+5=\frac{11}{2}$，所以该外接球的表面积为 $4\pi\cdot OA^2=4\pi\times\frac{11}{2}=22\pi$.



四、解答题

17. **解**：(1)$s_1^2=\frac{1}{10}(6^2+8^2+16^2+16^2+8^2+12^2+12^2+6^2)=100$. (2分)

$s_2^2=\frac{1}{10}(2^2+4^2+8^2+2^2+2^2+1^2+1^2+8^2+1^2+1^2)=16$. (4分)

(2)由(1)知 $X\sim N(50,10^2)$，$Y\sim N(60,4^2)$. (5分)

因为 $P(X\leqslant 60)>P(X\leqslant 50)$，且 $P(X\leqslant 50)=P(Y\leqslant 60)=\frac{1}{2}$，

所以 $P(X\leqslant 60)>P(Y\leqslant 60)$. (7分)

因为 $P(X\leqslant 70)=P(X\leqslant \mu_1+2\sigma_1)$，$P(Y\leqslant 70)>P(Y\leqslant 68)=P(Y\leqslant \mu_2+2\sigma_2)$，$P(X\leqslant \mu_1+2\sigma_1)=P(Y\leqslant \mu_2+2\sigma_2)$，

所以 $P(X\leqslant 70)<P(Y\leqslant 70)$. (9分)

所以送甲去机场应该选择路线一，送乙去机场应该选择路线二. (10分)

18. **解**：(1)由已知得 $a(\cos B+\cos C)=(b+c)\cos A$，

由正弦定理，得 $\sin A(\cos B+\cos C)=(\sin B+\sin C)\cos A$， (2分)

则 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin C\cos A-\cos C\sin A$，

即 $\sin(A-B)=\sin(C-A)$， (3分)

所以 $C-B=\pi$(舍去)或 $B+C=2A$， (4分)

故 $\pi-A=2A$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$. (5分)

(2)设 $\angle ACB=\theta$，

在 $\triangle ACD$ 中，

由正弦定理，得 $\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{AC}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$ ①， (7分)

在 $\triangle ABC$ 中，

由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{AC}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$ ②， (9分)

所以 $\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. (10分)

所以 $\frac{\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\tan\theta=3\sqrt{3}$， (11分)

所以 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，即 $\sin\angle ACD=\frac{3\sqrt{21}}{14}$. (12分)

19. **解**：(1)(ⅰ)批次 M 芯片的次品率为 $P_M=1-(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)=1-\frac{59}{60}\times\frac{58}{59}\times\frac{57}{58}=\frac{1}{20}$. (3分)

(ⅱ)设批次 M 的芯片智能自动检测合格为事件 A，人工抽检合格为事件 B，

由已知得 $P(A)=\frac{49}{50}$，$P(AB)=1-P_M=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$， (5分)

则工人在流水线进行人工抽检时，抽检一个芯片恰为合格品的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{19}{20}\times\frac{50}{49}=\frac{95}{98}$. (7分)

(2)零假设为 H_0：芯片批次与用户对开机速度的满意度无关联. 更多试题与答案，关注微信公众号：三晋高中指南

由已知可建立 2×2 列联表如下：

开机速度满意度	芯片批次		合计
	M	N	
满意	30	58	88
不满意	10	2	12
合计	40	60	100

(9分)

根据列联表中的数据得 $\chi^2=\frac{100\times(10\times 58-2\times 30)^2}{40\times 60\times 12\times 88}\approx 10.669>7.879=x_{0.005}$. (11分)

根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为芯片批次与用户对开机速度的满意度有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.005. (12分)

20. **解**：(1)质量指标值在 250 以下的产品所占比例为 $(0.001+0.002+0.003)\times 50=0.3<0.6$，

在 300 以下的产品所占比例为 $0.3+0.008\times 50=0.7>0.6$. (1分)

所以 60%分位数一定位于区间[250，300)内.

由 $250+50\times\frac{0.6-0.3}{0.7-0.3}=287.5$，

可以估计该产品的质量指标值的 60%分位数为 287.5. (3分)

(2)$(0.001+0.001)\times 50\times 100=10$，所以样本的 B 级零件件数为 10，质量指标值在区间[350，400]的零件有 5 件，故 ξ 可能取的值为 0，1，2，3. (4分)

$P(\xi=0)=\frac{C_5^3C_5^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$，$P(\xi=1)=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$，$P(\xi=3)=\frac{C_5^0C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$. (6分)

则随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

所以 $E(\xi)=\frac{5}{12}+\frac{10}{12}+\frac{3}{12}=\frac{3}{2}$. (7 分)

(3)设每箱零件中 A 级零件有 X 件，每箱零件的利润为 Y 元，则 B 级零件有$(500-X)$件，

由题意知 $Y=10X+5(500-X)=5X+2\ 500$.

由(2)知每箱零件中 B 级零件的概率为$(0.001+0.001)\times50=0.1$，A 级零件的概率为 $1-0.1=0.9$，

所以 $X\sim B(500,0.9)$， (10 分)

所以 $E(X)=500\times0.9=450$，

所以 $E(Y)=E(5X+2\ 500)=5E(X)+2\ 500=4\ 750$(元).

所以估计每箱零件的利润是 4 750 元. (12 分)

21. (1)**证明**：在直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，

所以 $AB /\!/ A_1B_1$，$A_1B_1\perp BB_1$.

又 $C_1F\perp A_1B_1$，$BB_1\cap C_1F=F$，BB_1，$C_1F\subset$平面 BB_1C_1C，

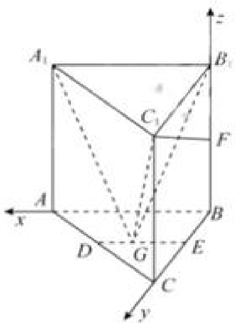
所以 $A_1B_1\perp$平面 BB_1C_1C，

所以 $AB\perp$平面 BB_1C_1C.

又 $BC\subset$平面 BB_1C_1C，所以 $AB\perp BC$，

所以 AB，BC，BB_1 两两垂直. (3 分)

以 B 为坐标原点，AB，BC，BB_1 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示.



则 $A_1(2,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，$D(1,1,0)$，$E(0,1,0)$，$F(0,0,1)$，$B_1(0,0,2)$，

故$\overrightarrow{ED}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{C_1F}=(0,-2,-1)$.

设$\overrightarrow{EG}=\lambda\overrightarrow{ED}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则$\overrightarrow{EG}=\lambda(1,0,0)$，故 $G(\lambda,1,0)$，

所以$\overrightarrow{A_1G}=(\lambda-2,1,-2)$，

故$\overrightarrow{C_1F}\cdot\overrightarrow{A_1G}=(0,-2,-1)\cdot(\lambda-2,1,-2)=0$，

所以$\overrightarrow{C_1F}\perp\overrightarrow{A_1G}$，即 $C_1F\perp A_1G$. (5 分)

(2)**解**：由(1)可知$\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{A_1G}=(\lambda-2,1,-2)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(-2,0,0)$，

设平面 GA_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1G}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x+2y=0,\\ (\lambda-2)x+y-2z=0.\end{cases}$

令 $x=2$，得 $y=2$，$z=\lambda-1$，则平面 GA_1C_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,2,\lambda-1)$. (7 分)

设平面 GA_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1G}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2a=0,\\ (\lambda-2)a+b-2c=0,\end{cases}$则 $a=0$.

令$c=1$，得 $b=2$，则平面 GA_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$. (9 分)

设平面 GA_1C_1 与平面 GA_1B_1 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|4+\lambda-1|}{\sqrt{5}\times\sqrt{8+(\lambda-1)^2}}=\frac{|\lambda+3|}{\sqrt{5}\times\sqrt{8+(\lambda-1)^2}}$. (10 分)

令 $\lambda+3=t$，$t\in[3,4]$，则 $\cos\theta=\frac{|\lambda+3|}{\sqrt{5}\times\sqrt{8+(\lambda-1)^2}}=\frac{|t|}{\sqrt{5}\times\sqrt{8+(t-4)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{24}{t^2}-\frac{8}{t}+1}}$，

而函数 $y=\frac{24}{t^2}-\frac{8}{t}+1$ 在$\frac{1}{t}\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$时单调递增，

故当$\frac{1}{t}=\frac{1}{4}$时，$y=\frac{24}{t^2}-\frac{8}{t}+1$ 取得最小值，即当$\frac{1}{t}=\frac{1}{4}$，即 $t=4$，$\lambda=1$ 时，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{24}{t^2}-\frac{8}{t}+1}}$取得最大值$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

故平面 GA_1C_1 与平面 GA_1B_1 夹角的余弦值的最大值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$. (12 分)

22. **解**：(1)由题意得 $\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\overline{y}=\frac{10+12+17+20+26}{5}=17$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1\times10+2\times12+3\times17+4\times20+5\times26=295$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\frac{295-5\times3\times17}{55-45}=4$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=17-4\times3=5$，

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=4x+5$. （4分）

令 $\hat{y}=4x+5>50$，得 $x>11.25$.

又 x 为正整数，所以 $x\geqslant 12$.

所以该地区新能源汽车的销量最早在2028年能突破50万辆. （5分）

(2)(ⅰ)由题意知，该地区200名购车车主中女性有 $200-95-45=60$(名)，

故其中购置新能源汽车的女性车主有 $60-20=40$(名).

所以购置新能源汽车的车主中，女性车主所占的比例为 $\frac{40}{40+45}=\frac{8}{17}$.

所以该地区购置新能源汽车的车主中女性车主的概率为 $\frac{8}{17}$. （6分）

当 $x=7$ 时，$\hat{y}=4\times 7+5=33$，所以预测该地区2023年新能源汽车的销量为33万辆.

因此预测该地区2023年购置新能源汽车的女性车主的人数为 $\frac{8}{17}\times 33\approx 15.5$(万人). （7分）

(ⅱ)由题意知 $p=\frac{45}{w+45}$，由 $0\leqslant w\leqslant 135$，得 $\frac{1}{4}\leqslant p\leqslant 1$.

则 $f(p)=C_5^3p^3(1-p)^2=10(p^5-2p^4+p^3)$，

所以 $f'(p)=10(5p^4-8p^3+3p^2)=10p^2(5p^2-8p+3)=10p^2(p-1)(5p-3)$， （8分）

当 $p\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{5}\right)$ 时，$f'(p)>0$，函数 $f(p)$ 单调递增；

当 $p\in\left(\frac{3}{5},1\right]$ 时，$f'(p)<0$，函数 $f(p)$ 单调递减.

（10分）

所以当 $p=\frac{3}{5}$ 时，$f(p)$ 取得最大值，即 $f(p)_{\max}=f\left(\frac{3}{5}\right)=C_5^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$.

此时 $\frac{45}{w+45}=\frac{3}{5}$，解得 $w=30$.

故当 $w=30$ 时，$f(p)$ 取得最大值 $\frac{216}{625}$. （12分）

关于我们