银川一中2023届第三次模拟数学(文科)试卷参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	A	B	C	C	D	A	B	C	A	D

8.【答案】A

【详解】试题分析：注意长度、距离为正，再根据三角形的面积公式即可得到 f（x）的表达式，然后化简，分析周期和最值，结合图象正确选择

解：在直角三角形 OMP 中，OP=0A=1，∠POA=x，

∴s△POA=$\frac{1}{2}$×1×1sinx=$\frac{1}{2}$|sinx|，

∴f（x）=$\frac{1}{2}$|sinx|，其周期为 T=π，最大值为$\frac{1}{2}$，最小值为 0，

故选：A.

考点：函数的图象.

9.【答案】B

【分析】首先求出 $f(x)$ 的定义域和极值点，由题意得极值点在区间$\left(m,m+\frac{1}{2}\right)$内，且 $m>0$，得出关于 m 的不等式组，求解即可.

【详解】函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，

因为 $f(x)$ 在区间$(\mathbf{m},\mathbf{m}+\frac{1}{3})$上不单调，所以$\begin{cases}m>0\\ m<1<m+\frac{1}{3}\end{cases}$，

解得 B，

10.【答案】C

【分析】根据等差中项的应用可知数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列，求出数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的通项公式，得 $a_na_{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，利用裂项相消法求和即可.

【详解】∵$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$，$\frac{1}{a_1}=1$，$\frac{1}{a_2}=2$，

∴数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

∴$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\times1=n$，∴$a_n=\frac{1}{n}$．∴$a_na_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

∴数列$\{a_na_{n+1}\}$的前 10 项和为

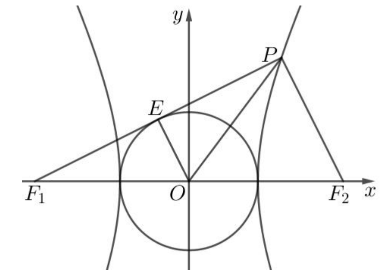
$S_{10}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$.

故选：C.

11.【答案】A

【分析】根据给定条件，确定 $PF_1\perp PF_2$，结合圆的切线性质及双曲线定义列式计算作答.

【详解】因为直线 F_1P 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 切于点 E，则 $OE\perp F_1P$，而$\triangle OF_1P$ 为等腰三角形，



必有$|OP|=|OF_1|$，E 为 F_1P 的中点，而 O 为 F_1F_2 中点，

于是 $OE//PF_2$，有 $PF_1\perp PF_2$，

且$|PF_2|=2|OE|=2a,|PF_1|=4a$，令双曲线焦距为 2c，

由$|PF_2|^2+|PF_1|^2=|F_1F_2|^2$，

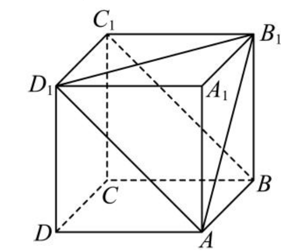
得$(2a)^2+(4a)^2=(2c)^2$，即 $c^2=5a^2$，有 $e^2=5$，

所以双曲线的离心率 $e=\sqrt{5}$.故选：A

12.【答案】C

【分析】对于 A，将异面直线通过平移作出其平面角即可得$\angle B_1AD_1$ 为异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的平面角为$60°$；对于 B，利用线面垂直的性质和线面垂直的判定定理即可证明 $EF\perp$平面 ACC_1A_1，再由面面垂直的判定定理即可得平面 $EFA\perp$平面 ACC_1A_1；对于 C，假设存在点 E，F 使得 $AE//BF$，显然由线面平行判定定理可得 $BF//$平面 ABE，这与 $BF\cap$平面 $ABE=F$ 矛盾，即不存在点 E，F 使得 $AE//BF$；对于 D，利用等体积法可知 $V_{B-AEF}=V_{A-BEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle BEF}d=\frac{2}{3}$，即三棱锥 $B-AEF$ 体积不变.

【详解】对于 A，如下图所示：



将 BC_1 平移到 AD_1，连接 B_1D_1，

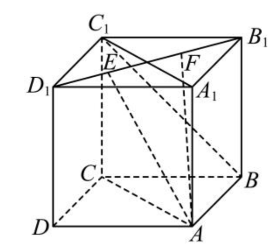
易知在$\triangle AB_1D_1$中，$\angle B_1AD_1$ 即为异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的平面角，

由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，

利用勾股定理可知 $AB_1=AD_1=B_1D_1=2\sqrt{2}$，

即$\triangle AB_1D_1$为正三角形，所以异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角为$60°$，

即 A 正确；



对于 B，连接 AC,A_1C_1，如下图所示：

由 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体即可得，

$AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，而 $B_1D_1\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$

所以 $AA_1\perp B_1D_1$，又 E,F 在线段 B_1D_1 上，所以 $AA_1\perp EF$；

又 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形，所以 $A_1C_1\perp B_1D_1$，即 $A_1C_1\perp EF$，

又 $A_1C_1\cap AA_1=A_1$，$A_1C_1,AA_1\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $EF\perp$平面 ACC_1A_1，

又 $EF\subset$平面 EFA，所以平面 $EFA\perp$平面 ACC_1A_1，即 B 正确；

对于 C，易知点 F 不在平面 ABE 内，

假设 $AE//BF$，又 $AE\subset$平面 ABE，$BF\not\subset$平面 ABE，所以 $BF//$平面 ABE，

显然这与 $BF\cap$平面 $ABE=F$ 矛盾，所以假设不成立，即 C 错误；

对于 D，当 E，F 运动时，由等体积法可知三棱锥 $B-AEF$ 体积与三棱锥 $A-BEF$ 的体积相等，

即 $V_{B-AEF}=V_{A-BEF}$；易知三棱锥 $A-BEF$ 的底面积 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}EF\cdot BB_1=\sqrt{2}$，

易知 $AC\perp$平面 BEF，所以点 A 到平面 BEF 的距离为 $d=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，

所以 $V_{B-AEF}=V_{A-BEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle BEF}d=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{2}{3}$，

即当 E，F 运动时，三棱锥 $B-AEF$ 体积不变，即 D 正确. 故选：C

二、填空题

13. $\sqrt{5}$；

14. 13

【详解】由程序框图可知当 $a=91$，$b=39$ 时，满足 $a>b$，则 $a=91-39=52$，当 $a=52$，$b=39$ 时，满足 $a>b$，则 $a=52-39=13$，当 $a=13$，$b=39$ 时，满足 $a<b$，则 $b=39-13=26$，当 $a=13$，$b=26$ 时，满足 $a<b$，则 $b=26-13=13$，当 $a=13$，$b=13$

15. $3+2\sqrt{2}$

【详解】由 $x^2+y^2-2ax-2by=0 \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$，

所以该圆的圆心坐标为 (a,b)，

因为圆 $x^2+y^2-2ax-2by=0$ 被直线 $x+y=1$ 平分，

所以圆心 (a,b) 在直线 $x+y=1$ 上，

因此有 $a+b=1$，$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\ge 3+2\sqrt{2}$

16. 18

【解答】

解：因为 $\{a_n\}$ 为各项均为正数的等比数列，

所以由 $a_3+a_5=5, a_2\cdot a_6=a_3\cdot a_5=4$，得 a_3，a_5 为方程 $x^2-5x+4=0$ 的两根，又 $q\in(0,1)$，

所以 $a_3=4$，$a_5=1$，

得 $q^2=\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{4}$，即 $q=\frac{1}{2}$，

所以 $a_n=a_3\times q^{n-3}=\frac{1}{2^{n-5}}$，

得 $b_n=\log_2 a_n=5-n$，

所以 $\{b_n\}$ 为等差数列，

所以 $S_n=\frac{n(b_1+b_n)}{2}=\frac{n(9-n)}{2}$，

则 $\frac{S_n}{n}=\frac{9-n}{2}$，

即数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，所以 $\frac{S_1}{1}+\frac{S_2}{2}+\cdots+\frac{S_n}{n}=\frac{n(4+\frac{9-n}{2})}{2}=\frac{-n^2+17n}{4}$，

所以当 $n=8$ 或 9 时，$\frac{S_1}{1}+\frac{S_2}{2}+\cdots+\frac{S_n}{n}$ 最大，最大值为 18.

故答案为 18.

三、解答题

17. 【答案】(1)有 99% 的把握认为学生得“党史学习之星”与年级有关　　(2) $\frac{3}{5}$

【详解】(1) 根据列联表代入计算可得：

$K^2=\frac{100\times(40\times30-20\times10)^2}{60\times40\times50\times50}=\frac{50}{3}\approx 16.667>6.635$，............................4

所以有 99% 的把握认为学生得“党史学习之星”与年级有关........................6

(2) 由题意可知，所抽取的 6 名学生高一年级有 4 人，记为 A_1，A_2，A_3，A_4

高二年级有 2 人，设为甲、乙.

从这 6 人中随机抽取 2 人的所有基本事件有 $\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_1,A_4\}$，$\{A_1$，甲$\}$，$\{A_1$，乙$\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_2,A_4\}$，$\{A_2$，甲$\}$，$\{A_2$，乙$\}$，$\{A_3,A_4\}$，$\{A_3$，甲$\}$，$\{A_3$，乙$\}$，$\{A_4$，甲$\}$，$\{A_4$，乙$\}$，$\{$甲，乙$\}$，共 15 个，............................8

其中至少有一人是高二年级基本事件有 $\{A_1$，甲$\}$，$\{A_2$，甲$\}$，$\{A_3$，甲$\}$，$\{A_4$，甲$\}$，$\{$甲，乙$\}$，$\{A_1$，乙$\}$，$\{A_2$，乙$\}$，$\{A_3$，乙$\}$，$\{A_4$，乙$\}$，共 9 个. 10

故至少有一人是高二年级的概率 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$...12

18. 【答案】解：(1)已知函数 $f(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)-2\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}$，

则 $f(x)=\sin2x-2\sqrt{3}\times\frac{1+\cos2x}{2}+\sqrt{3}=\sin2x-\sqrt{3}\cos2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，...........2

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

则 $k\pi-\frac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in Z$，................................4

即函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0,\frac{5\pi}{12}]$ 和 $[\frac{11\pi}{12},\pi]$，$k\in Z$；.................6

(2)已知 $f(\frac{A}{2})=\sqrt{3}$，即 $2\sin(A-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$，即 $\sin(A-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $-\frac{\pi}{3}<A-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，则 $A-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，即 $A=\frac{2\pi}{3}$，............................8

又 $a=\sqrt{3}$，$c=1$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 可得 $b^2+b-2=0$，

又 $b>0$，则 $b=1$，...10

则 $B=\frac{\pi}{6}, \sin B=\frac{1}{2}$..12

19. 【详解】(1) 证明：取 AB 的中点 H，连接 GH，FH，如图所示.

因为 G 是 EP 的中点，

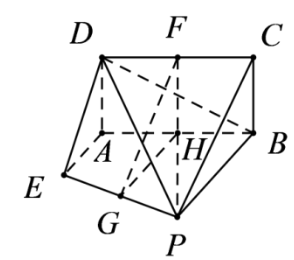
所以 $GH /\!/ BP$.

又因为 $GH\not\subset$ 平面 PCB，$BP\subset$ 平面 PCB，

所以 $GH /\!/$ 平面 PCB 2

同理 $FH /\!/$ 平面 PCB 4

又因为 $GH\cap FH=H$，所以平面 $GFH /\!/$ 平面 PCB，.........6



(2) 连接 HP，

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABPE$，

平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABPE=AB$，$DA\perp AB$，

所以 $DA\perp$ 平面 $ABPE$，

由题意知易得直角梯形 $ABPE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(1+2)\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\angle ABP=\frac{\pi}{3}$，

所以 $V_{D-ABPE}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 8

在 $\triangle BHP$ 中，由余弦定理得 $HP^2=4+1-2\times2\times1\times\cos60^\circ=3$，

所以 $BP^2=HP^2+HB^2$，所以 $HP\perp AB$.

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABPE$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABPE=AB$，

所以 $HP\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $V_{P-BCD}=\frac{1}{3}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，.....................................10

所以多面体 $ABCDEP$ 的体积为 $V_{D-ABPE}+V_{P-BCD}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$....................................12

20. 【答案】(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)直线 PQ 的斜率为定值 1，理由见解析

【详解】(1) 设 $P(x_1,y_1)$，椭圆 C 的左、右顶点坐标分别为 $(-a,0)$，$(a,0)$，

又 $a-c=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，$e=\frac{c}{a}$ 即，解得 $b=\sqrt{3}$，所以 $a=\sqrt{6}$，

即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=\frac{1}{2}x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$，又 A 在第一象限，所以 $A(2,1)$，

由题意知 $\angle PAQ$ 的内角平分线的斜率不存在，即该角平分线与 x 轴垂直，

设直线 AP 的斜率为 k，则直线 AQ 的斜率为 $-k$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 AP 的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $y=kx+1-2k$，

由 $\begin{cases}y=kx+1-2k\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y 得 $(2k^2+1)x^2+4k(1-2k)x+8k^2-8k-4=0$，

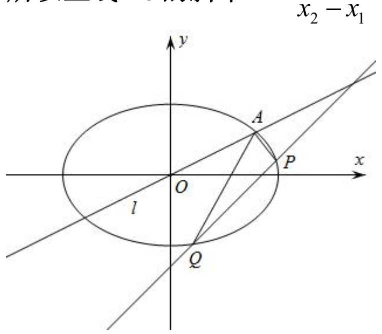
因为 P、A 为直线 AP 与椭圆的交点，所以 $2x_1=\frac{8k^2-8k-4}{2k^2+1}$，即 $x_1=\frac{4k^2-4k-2}{2k^2+1}$，

把 k 换为 $-k$ 得 $x_2=\frac{4k^2+4k-2}{2k^2+1}$，

所以 $x_2-x_1=\frac{8k}{2k^2+1}$，

所以 $y_2-y_1=(-kx_2+1+2k)-(kx_1+1-2k)=k[4-(x_1+x_2)]=\frac{8k}{2k^2+1}$，

所以直线 PQ 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$，即直线 PQ 的斜率为定值 1.



21. 【答案】(1) $4x-y-2=0$

(2) $\left(0,e^2-\frac{1}{e^2}-4\right)$

【分析】(1) 根据导数的几何意义求出切线的斜率，进而根据点斜式即可得出结果；

(2) 求出 $g'(x)$，可得 $x_1+x_2=a>0, x_1x_2=1$，化简 $g(x_1)-g(x_2)=\frac{1}{x_1^2}-x_1^2+4\ln x_1\left(\frac{1}{e}<x_1<1\right)$，构造函数 $h(t)=\frac{1}{t^2}-t^2+4\ln t\left(\frac{1}{e}<t<1\right)$，利用 $h(t)$ 单调性即可求得答案.

【详解】(1) $f(x)=x^2+2\ln x+1, f'(x)=2x+\frac{2}{x}$，

$\therefore f(1)=2, f'(1)=4,$

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-2=4(x-1)$，即 $4x-y-2=0$.

(2) $g(x)=x^2-2ax+2\ln x+1$，

则函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty), g'(x)=2x-2a+\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-ax+1)}{x}$，

若函数 $g(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2<e$.

则方程 $x^2-ax+1=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4>0$，且 $x_1+x_2=a>0, x_1x_2=1$，

$\therefore x_2=\frac{1}{x_1}<e, \frac{1}{e}<x_1<1$.

$\therefore g(x_1)-g(x_2)=x_1^2-2ax_1+2\ln x_1-x_2^2+2ax_2-2\ln x_2$

$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)-2a(x_1-x_2)+2\ln x_1-2\ln x_2$

$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)-2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2\ln x_1-2\ln\frac{1}{x_1}$

$=-(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4\ln x_1$

$=-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)+4\ln x_1$

$=\frac{1}{x_1^2}-x_1^2+4\ln x_1\left(\frac{1}{e}<x_1<1\right)$.

设 $h(t)=\frac{1}{t^2}-t^2+4\ln t\left(\frac{1}{e}<t<1\right)$，

则 $h'(t)=-\frac{2}{t^3}-2t+\frac{4}{t}=-\frac{2(t^2-1)^2}{t^3}<0$ 在 $t\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上恒成立.

故 $h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 单调递减，从而 $h(t)>h(1)=0, h(t)<h\left(\frac{1}{e}\right)=e^2-\frac{1}{e^2}-4$.

因此，$g(x_1)-g(x_2)$ 的取值范围是 $\left(0,e^2-\frac{1}{e^2}-4\right)$.

22. 【答案】(1) $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$　　(2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【分析】(1) 根据已知得到 P、Q 两点的极坐标，代入距离公式即可；

(2) 设 $A(\rho_A,\theta)(0\le\theta\le\pi)$，$B\left(\rho_B,\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$，根据极坐标方程求出 ρ_A、ρ_B，将三角形面积表示为 θ 的三角函数，根据三角恒等变换求三角函数的最大值.

【详解】(1) 将 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入方程 $\rho=2\cos 2\theta$，

得，$\rho_P=2\cos\frac{\pi}{3}=1$，则 P 的极坐标为 $\left(1,\frac{\pi}{6}\right)$.

又G与极轴的交点为Q的极坐标为$(2,0)$．

则$|PQ|=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$．

（2）不妨设$A(\rho_A,\theta)(0\le\theta\le\pi)$，$B\left(\rho_B,\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$，

则$\rho_A=2\cos2\theta$，$\rho_B=2\cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$

所以，$\triangle AOB$的面积$S=\frac{1}{2}|\rho_A\rho_B|\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}|\rho_A\rho_B|$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4\left|\cos2\theta\cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right|=\left|\sqrt{3}\cos2\theta\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta\right)\right|$

$=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 2\theta+\frac{3}{2}\sin2\theta\cos2\theta\right|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos4\theta)+\frac{3}{4}\sin4\theta\right|$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\sqrt{3}\sin4\theta-1-\cos4\theta\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|2\sin\left(4\theta-\frac{\pi}{6}\right)-1\right|$

所以，当$4\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，即$\theta=\frac{5\pi}{12}$时，$S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$．

所以，$\triangle AOB$面积S最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$．

23.【答案】(1)$\left[-\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right]$

(2)证明见解析

【分析】（1）将函数写成分段函数，再分类讨论，分别求出不等式的解集，从而得解；

（2）由（1）可得函数图象，即可求出函数的最小值，再利用基本不等式证明即可.

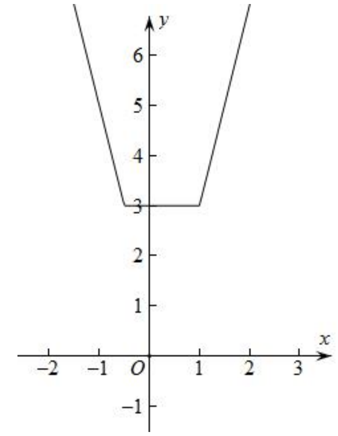
【详解】（1）解：因为$f(x)=|2x-2|+|2x+1|=\begin{cases}4x-1,x>1\\3,-\frac{1}{2}\le x\le1\\1-4x,x<-\frac{1}{2}\end{cases}$，

所以不等式$f(x)\le4+x$，即$\begin{cases}x>1\\4x-1\le4+x\end{cases}$或$\begin{cases}-\frac{1}{2}\le x\le1\\3\le4+x\end{cases}$或$\begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\1-4x\le4+x\end{cases}$，

解得$1<x\le\frac{5}{3}$或$-\frac{1}{2}\le x\le1$或$-\frac{3}{5}\le x<-\frac{1}{2}$，

综上可得原不等式的解集为$\left[-\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right]$．

（2）解：由（1）可得函数$f(x)$的图象如下所示：



所以$f(x)_{\min}=3$，即$T=3$，所以$a+b+c=3$，

又$a>0$，$b>0$，$c>0$，

所以$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}=\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}ab}+\sqrt{\frac{1}{2}ac}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}a+c\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当$b=c=\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}$时取等号，

所以$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$．