高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意知 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant x\leqslant 6\}=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2,3\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，$\{-1,5,6\}=\complement_U(A\cup B)$. 故选 B. 来源：高三答案公众号

2. A　由题意得 $(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $\boldsymbol{a}^2+t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，故 $10+5t=0$，解得 $t=-2$. 故选 A.

3. B　去掉最高分和最低分后，中位数一定不变，其余数字特征不一定不变. 故选 B.

4. C　对于 A，取 $z_1=3+\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$ 时，$z_1-z_2=2>0$，但虚数不能比较大小，故 A 错误；对于 B，取 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=1-\mathrm{i}$，显然 $|z_1|=|z_2|$，但 $z_1\neq\pm z_2$，故 B 错误；对于 C，因为 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}>1$，所以 $|z_1|>|z_2|$，故 C 正确；对于 D，取 $z_1=1$，$z_2=\mathrm{i}$，满足 $z_1^2+z_2^2=0$，但是 $z_1\neq z_2\neq 0$，故 D 错误. 故选 C.

5. D　因为 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1>-1$ 不成立，所以 p 为假命题；因为当 $x=0$，$y\in\mathbf{R}$ 时，$\sin(0+y)=\sin 0+\sin y$ 成立，故 q 为真命题. 所以 $p\wedge q$，$p\wedge(\neg q)$，$p\vee(\neg q)$ 为假命题，$(\neg p)\wedge q$ 为真命题. 故选 D.

6. B　由题意，$\ln m=-4k+a$，$\ln\frac{m}{2}=-\frac{1}{2}\ln 4-\frac{k}{4}b^2+a$，所以 $\ln m-\ln\frac{m}{2}=-4k+a-\left(-\frac{1}{2}\ln 4-\frac{k}{4}b^2+a\right)$，即 $-4k+\frac{k}{4}b^2=0$，又 $k\neq 0$，所以 $b^2=16$. 因为 $b>0$，所以 $b=4$. 故选 B.

7. C　直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 旋转一周所得几何体的体积 $V_1=\frac{1}{3}(4\pi+16\pi+\sqrt{4\pi\times16\pi})\times4=\frac{112\pi}{3}$，设重心 G 到 AB 的距离为 d_1，则 $\frac{112\pi}{3}=\frac{2+4}{2}\times4\times2\pi d_1$，解得 $d_1=\frac{11}{9}$；直角梯形绕 BC 旋转一周所得几何体的体积 $V_2=32\pi+\frac{32\pi}{3}=\frac{128\pi}{3}$，设重心 G 到 BC 的距离为 d_2，则 $\frac{128\pi}{3}=\frac{2+4}{2}\times4\times2\pi d_2$，所以 $d_2=\frac{16}{9}$，所以 $BG=\sqrt{\left(\frac{11}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{113}}{9}$. 故选 C.

8. D　由题意知 $a^2-b^2=4$. 设 C 的左焦点为 F'，则 $F'(-2,0)$，因为 $|PA|+|PF|=10$，且 $|PF|+|PF'|=2a$，所以 $|PA|+2a-|PF'|=10$，所以 $|PA|-|PF'|=10-2a$，所以 $|10-2a|\leqslant|AF'|=5$，所以 $\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{15}{2}$. 因为 $b^2=a^2-4$，点 $A(2,3)$ 为椭圆 C 内一点，所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}<1$，所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{a^2-4}<1$，所以 $a^4-17a^2+16>0$，又 $a>2$，故 $a>4$，所以 $4<a\leqslant\frac{15}{2}$. 故选 D.

9. D　因为 $b^2=2a^2+c^2$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{a}{2c}$，$B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\frac{a^2}{4c^2}}=\frac{\sqrt{4c^2-a^2}}{2c}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{a\sqrt{4c^2-a^2}}{4}=\frac{\sqrt{9a^2(4c^2-a^2)}}{12}\leqslant\frac{1}{12}\times\frac{9a^2+4c^2-a^2}{2}=\frac{1}{12}\times\frac{4(2a^2+c^2)}{2}=\frac{3}{2}$，当且仅当 $4c^2-a^2=9a^2$，即 $a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{5}$ 时等号成立，故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}$. 故选 D.

10. C　由题意得 $f(x)=\frac{6\sin x\cos x}{2\cos^2x+1}=\frac{3\sin 2x}{\cos 2x+2}$，所以 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{3\sin(\pi-2x)}{\cos(\pi-2x)+2}=\frac{3\sin 2x}{-\cos 2x+2}=-\frac{3\sin 2x}{\cos 2x-2}\neq f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称；$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\sin(2x+\pi)}{\cos(2x+\pi)+2}=\frac{-3\sin 2x}{-\cos 2x+2}=\frac{3\sin 2x}{\cos 2x-2}\neq f(x)$，故 $\frac{\pi}{2}$ 不是 $f(x)$ 的周期；设 $k=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+2}$，则 k 的大小等于点 $(\cos 2x,\sin 2x)$ 与点 $(-2,0)$ 连线的斜率，又点 $(\cos 2x,\sin 2x)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上，利用数形结合的方法易求得 $k\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，故 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$；

$f'(x)=\frac{12\cos 2x+6}{(\cos 2x+2)^2}$，令 $f'(x)\leqslant 0$，得 $\cos 2x\leqslant -\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减，综上，ABD 错误 C 正确. 故选 C. 来源：高三答案公众号

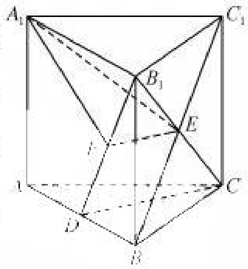
11. A　由题意知 $PF_1\perp PF_2$，所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，又因为 $||PF_1|-|PF_2||=2a$，与 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$ 联立，得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2b^2$，$(|PF_1|+|PF_2|)^2=4c^2+4b^2$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{c^2+b^2}$，又 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\cdot a$，所以 $2b^2=a(2\sqrt{b^2+c^2}+2c)$，即 $b^2-ac=a\sqrt{b^2+c^2}$，所以 $b^2-2ac=a^2$，即 $c^2-2ac-2a^2=0$，所以 $e^2-2e-2=0$，所以 $e=\sqrt{3}+1$. 故选 A.

12. B　由题意知 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3\frac{9}{7}}=3^{\log_3\frac{7}{9}}=\frac{7}{9}$，$\ln b-\ln a=0.1+\ln 0.7-\ln\frac{7}{9}=\frac{1}{10}+\ln\frac{9}{10}$，令 $f(x)=1-x+\ln x$，则 $f'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f\left(\frac{9}{10}\right)<f(1)=0$，所以 $\ln b-\ln a<0$，所以 $a>b$；因为 $\cos\frac{2}{3}=1-2\sin^2\frac{1}{3}$，易知 $0<\sin\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，所以 $\cos\frac{2}{3}=1-2\sin^2\frac{1}{3}>1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$，所以 $c>a$，所以 $c>a>b$. 故选 B.

13. e　由题意知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率等于 3，又 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}+2x$，所以 $f'(1)=\frac{1}{\ln a}+2=3$，所以 $a=$e.

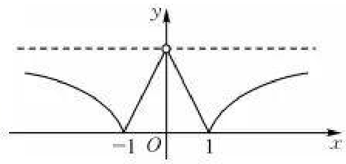
14. 1 792　$\left(x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=(-2)^r C_8^r x^{8-\frac{4r}{3}}(r=0,1,2,\cdots,8)$，令 $8-\frac{4r}{3}=0$，得 $r=6$，令 $8-\frac{4r}{3}=-1$ 无整数解，所以展开式中的常数项为 $(-2)^6C_8^6=1\ 792$.

15. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　连接 B_1D，取 B_1D 中点 F，连接 A_1F，EF，则 $EF/\!/CD$，所以 $\angle A_1EF$ 为 CD 与 A_1E 所成的角(或其补角). 因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 AB 的中点，易证 $CD\perp$ 平面 ABB_1A_1，从而可得 $EF\perp$ 平面 ABB_1A_1，又 $A_1F\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $EF\perp A_1F$. 不妨设 $AB=2$，则 $CD=\sqrt{3}$，$B_1D=\sqrt{5}$，所以 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$B_1F=\frac{\sqrt{5}}{2}$，又 $\cos\angle A_1B_1F=\cos\angle B_1DB=\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以



$A_1F=\sqrt{A_1B_1^2+B_1F^2-2A_1B_1\cdot B_1F\cos\angle A_1B_1F}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，所以 $A_1E=\sqrt{A_1F^2+EF^2}=2$，所以 $\cos\angle A_1EF=\frac{EF}{A_1E}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

16. $-2<b<0$ 且 $c=0$　显然 $f(x)$ 为偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-2x+2, & 0<x<1,\\ 2-\frac{2}{x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象，利用偶函数的对称性，易得 $f(x)$ 在其定义域上的图象(如图所示)；设 $f(x)=t$，则原方程变为 $t^2+bt+c=0$，所以原方程有 6 个不同的实数解的充要条件是方程 $t^2+bt+c=0$ 的两根 t_1,t_2 满足 $t_1=0$ 且 $0<t_2<2$；又 $t_1=0$ 时 $c=0$ 且 $t_2=-b$，而 $\Delta=b^2-4c$，则问题等价于 $\begin{cases}b^2-4c>0,\\ 0<-b<2,\\ c=0,\end{cases}$ 所以 $-2<b<0$ 且 $c=0$.



17. (1)证明：当 n 为偶数时 $a_n=3a_{\frac{n}{2}}$，又 $2^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 为偶数，

所以 $a_{2^n}=3a_{2^{n-1}}$，又 $a_1=1$，所以 $a_2=3a_1=3\neq 0$，所以 $a_{2^n}\neq 0$，…… 2 分

所以 $\frac{a_{2^n}}{a_{2^{n-1}}}=3$，所以 $\{a_{2^n}\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列. …… 4 分

(2)解：由(1)得 $a_{2^n}=3\times3^{n-1}=3^n$， …………………………………… 5分

当 n 为奇数时，$a_n=a_{n-2}+2(n\geqslant3)$，

所以 $a_{2n+1}=a_{2n-1}+2$，所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 2 的等差数列， …………………………………… 6分

所以 $a_{2n-1}=a_1+2(n-1)=2n-1$，来源：高三答案公众号

所以 $b_n=(2n-1)\cdot3^n$． …………………………………… 7分

所以 $S_n=1\times3+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n-3)\times3^{n-1}+(2n-1)\times3^n$，

两边同乘以 3，得

$3S_n=1\times3^2+3\times3^3+5\times3^4+\cdots+(2n-3)\times3^n+(2n-1)\times3^{n+1}$， …………………………………… 8分

两式相减，得

$-2S_n=3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^n-(2n-1)\times3^{n+1}=3+2\times\dfrac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\times3^{n+1}$

$=3+3^{n+1}-9-(2n-1)\times3^{n+1}=-6-(2n-2)\times3^{n+1}$，

所以 $S_n=(n-1)\times3^{n+1}+3$． …………………………………… 12分

18.(1)证明：延长 FM 与 DA 的延长线交于点 N，连接 CN 交 AB 于点 H，连接 FH.

因为平面 α//平面 $ABCD$，平面 $\alpha\cap$平面 $PAD=EF$，平面 $ABCD\cap$平面 $PAD=AD$，且 E 为 PA 的中点，所以 $EF//AD$，

且 $AD=2EF$。同理可得 $FG//CD$，$CD=2FG$. …………………………………… 2分

又 $AM=2ME$，所以 $AN=2EF=AD$， …………………………………… 3分

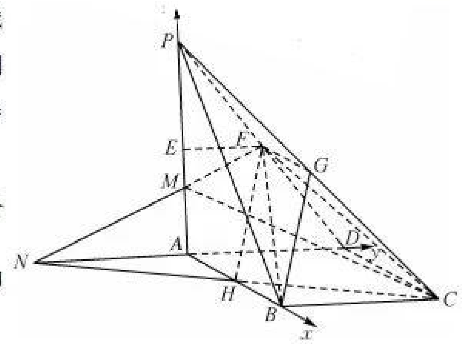
又 $AB//CD$，所以 H 为 AB 的中点，所以 $BH//CD$，且 $CD=2BH$. …………………………………… 4分

又 $FG//CD$，$CD=2FG$，

所以 $FG//BH$，且 $FG=BH$，所以四边形 $BHFG$ 为平行四边形，所以 $BG//FH$， …………………………………… 5分

又 $FH\subset$平面 CFM，$BG\not\subset$平面 CFM，

所以 $BG//$平面 CFM. …………………………………… 6分



(2)解：由题意易得 AB,AD,AP 两两垂直，故以 A 为坐标原点，直线 AB,AD,AP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系(如图所示)，则 $C(4,4,0)$，$D(0,4,0)$，$F(0,2,3)$，$M(0,0,2)$，$P(0,0,6)$，所以 $\overrightarrow{CD}=(-4,0,0)$，$\overrightarrow{CF}=(-4,-2,3)$，$\overrightarrow{MF}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,4,-6)$.

…………………………………… 8分

设平面 PCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}4y-6z=0,\\ -4x=0,\end{cases}$ 令 $z=2$，得 $x=0$，$y=3$，故 $\boldsymbol{n}=(0,3,2)$. …………………………………… 9分

设平面 CFM 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2b+c=0,\\ -4a-2b+3c=0,\end{cases}$

令 $b=1$，得 $a=-2$，$c=-2$，故 $\boldsymbol{m}=(-2,1,-2)$. …………………………………… 10分

设平面 CFM 与平面 PCD 所成锐二面角的大小为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{3\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{39}$，即平面 CFM 与平面 PCD 所成的锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{39}$.

…………………………………… 12分

19. 解：(1)由题意，乙得 10 分的基本事件有{乙抢到两题且一道正确一道错误或没有回答}、{甲、乙各抢到一题都回答正确}、{甲抢到两题且都回答错误或没有回答}，…………………………………… 1 分

所以乙总得分为 10 分的概率 $P=2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{337}{900}$. …… 4 分

(2)由题意得，甲的总得分 X 可能取值为 0,5,10,15,20. …………………………………… 5 分

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{289}{900}$； …………………………… 6 分

$P(X=5)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{17}{150}$； …………………………………… 7 分

$P(X=10)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{349}{900}$； …………………… 8 分

$P(X=15)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{15}$； …………………………………… 9 分

$P(X=20)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$. …………………………………… 10 分

分布列如下：

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{289}{900}$	$\frac{17}{150}$	$\frac{349}{900}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{9}$

所以 $E(X)=0\times\frac{289}{900}+5\times\frac{17}{150}+10\times\frac{349}{900}+15\times\frac{1}{15}+20\times\frac{1}{9}=\frac{23}{3}$. …………………………… 12 分

20. 解：(1)设 C 的焦距为 $2c$，由题意知 $\begin{cases}(a+c)-(a-c)=2\sqrt{3},\\ \frac{2b^2}{a}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ …………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ …………………………………… 4 分

故 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$. …………………………………… 5 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

消去 y 整理得 $(k^2+4)x^2+2mkx+m^2-4=0$， …………………………………… 6 分

所以 $\Delta=4m^2k^2-4(k^2+4)(m^2-4)>0$，即 $k^2-m^2+4>0$，

且 $x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2+4}$，$x_1x_2=\frac{m^2-4}{k^2+4}$. …………………………………… 7 分

因为点 P 是线段 MN 靠近点 N 的四等分点，

所以 $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{PN}$，所以 $x_1=-3x_2$，

所以 $3(x_1+x_2)^2=3\times(-2x_2)^2=-4x_2\times(-3x_2)=-4x_1x_2$，

所以 $3(x_1+x_2)^2+4x_1x_2=0$， …………………………………… 8 分

所以 $\frac{12k^2m^2}{(k^2+4)^2}+\frac{4(m^2-4)}{k^2+4}=0$，

整理得 $m^2k^2+m^2-k^2-4=0$. …………………………………………………………………… 9 分

显然 $m^2=1$ 不成立,所以 $k^2=\dfrac{4-m^2}{m^2-1}$. 来源:高三答案公众号

因为 $k^2-m^2+4>0$,所以$\dfrac{4-m^2}{m^2-1}-m^2+4>0$,即$\dfrac{(4-m^2)m^2}{m^2-1}>0$. ………………………… 10 分

解得 $-2<m<-1$,或 $1<m<2$,

所以实数 m 的取值范围为 $(-2,-1)\cup(1,2)$. ……………………………………………… 12 分

21. 解:(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{4}x^2-x+\dfrac{1}{2}$,其定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{2}x-1=\ln x-\dfrac{1}{2}x$,

所以 $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x$, …………………………………………………………………… 1 分

所以 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-x}{2x}(x>0)$,令 $g'(x)>0$,得 $0<x<2$;令 $g'(x)<0$,得 $x>2$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增,在 $(2,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………………… 2 分

①当 $t+1\leqslant 2$,即 $0<t\leqslant 1$ 时,$g(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增,

所以 $h(t)=g(x)_{\max}=g(t+1)=\ln(t+1)-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}$; ………………………………………… 3 分

②当 $t\leqslant 2$,$t+1>2$,即 $1<t\leqslant 2$ 时,$h(t)=g(x)_{\max}=g(2)=\ln 2-1$; ………………………… 4 分

③当 $t>2$ 时,$g(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递减,所以 $h(t)=g(x)_{\max}=g(t)=\ln t-\dfrac{1}{2}t$.

综上所述,$h(t)=\begin{cases}\ln(t+1)-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}, & 0<t\leqslant 1,\\ \ln 2-1, & 1<t\leqslant 2,\\ \ln t-\dfrac{1}{2}t, & t>2.\end{cases}$ ……………………………… 5 分

(2)因为 $e^{1+m}<x_1x_2^m$,所以 $1+m<\ln x_1+m\ln x_2$,

由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\ln x-ax$,故 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $f'(x)=\ln x-ax=0$ 的两个根,

……………………………………………………………………………………………… 6 分

所以 $f'(x_1)=\ln x_1-ax_1=0$,$f'(x_2)=\ln x_2-ax_2=0$,即 $\ln x_1=ax_1$,$\ln x_2=ax_2$,

所以 $1+m<\ln x_1+m\ln x_2$ 等价于 $1+m<ax_1+max_2=a(x_1+mx_2)$.

因为 $m>0$,$0<x_1<x_2$,所以原式等价于 $a>\dfrac{1+m}{x_1+mx_2}$, ……………………………………… 7 分

又 $\ln x_1=ax_1$,$\ln x_2=ax_2$,作差,得 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}=a(x_1-x_2)$,即 $a=\dfrac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$,

所以原式等价于 $\dfrac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>\dfrac{1+m}{x_1+mx_2}$. …………………………………………………… 8 分

因为 $0<x_1<x_2$,所以 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{(1+m)(x_1-x_2)}{x_1+mx_2}$ 恒成立.

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$,则 $t\in(0,1)$,故不等式 $\ln t<\dfrac{(1+m)(t-1)}{t+m}$ 在 $t\in(0,1)$ 上恒成立. ……………… 9 分

令 $\varphi(t)=\ln t-\dfrac{(1+m)(t-1)}{t+m}$.

又因为 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{(1+m)^2}{(t+m)^2}=\dfrac{(t-1)(t-m^2)}{t(t+m)^2}$,

当 $m^2\geqslant 1$ 时,得 $t\in(0,1)$ 时,$\varphi'(t)>0$,所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,

又 $\varphi(1)=0$,所以 $\varphi(t)<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立,符合题意; ………… 10 分

当 $m^2<1$ 时,可得 $t\in(0,m^2)$ 时,$\varphi'(t)>0$,$t\in(m^2,1)$ 时,$\varphi'(t)<0$,

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,m^2)$ 上单调递增,在 $(m^2,1)$ 上单调递减,又因为 $\varphi(1)=0$,

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上不能恒小于 0,不符合题意,舍去. ………… 11 分

综上所述,若不等式 $e^{1+m}<x_1x_2^m$ 恒成立,只需满足 $m^2\geqslant 1$,又 $m>0$,故 $m\geqslant 1$,

即正数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ………… 12 分

22. 解:(1)因为曲线 C_1 的极坐标方程 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2$,

又 $\rho^2=x^2+y^2$,$x=\rho\cos\theta$,可得 $x^2+y^2=2x+2$,

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=3$. ………… 2 分

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$,即 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=3$, ………… 3 分

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-3=0$,C_2 是过点 $(3,0)$,斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,即倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线. ………… 4 分

直线 C_2 的一个参数方程为 $\begin{cases}x=3+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数). ………… 5 分

(2)设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2.

把直线 C_2 的参数方程代入 $(x-1)^2+y^2=3$,可得 $t^2+2\sqrt{3}t+1=0$, ………… 6 分

$\Delta=(2\sqrt{3})^2-4\times 1=8>0$,

所以 $t_1+t_2=-2\sqrt{3}$,$t_1t_2=1>0$, ………… 8 分

故 $\frac{1}{|PA|+|PB|}=\frac{1}{|t_1+t_2|}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. ………… 10 分

23. 解:(1) $f(x)=\begin{cases}1-2x,x<0,\\ 1,0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-1,x>1,\end{cases}$ ………… 1 分

不等式 $f(x)<8$ 等价于 $\begin{cases}1-2x<8,\\ x<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1<8,\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-1<8,\\ x>1,\end{cases}$ ………… 4 分

解得 $-\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$,故不等式 $f(x)<8$ 的解集为 $\left(-\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$. ………… 5 分

(2)因为 $y=f(x)-|x|-|x-2|=|x-1|-|x-2|\leqslant|(x-1)-(x-2)|=1$,当且仅当 $x\geqslant 2$ 时等号成立,故 $m=1$, ………… 6 分

所以 $a+2b=1$, ………… 7 分

所以 $\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}=\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}\right)\cdot\frac{(2a+b)+(a+5b)}{3}=\frac{1}{3}\left[1+4+\frac{a+5b}{2a+b}+\frac{4(2a+b)}{a+5b}\right]$

$\geqslant\frac{1}{3}\left[5+2\sqrt{\frac{a+5b}{2a+b}\cdot\frac{4(2a+b)}{a+5b}}\right]=\frac{1}{3}\times(5+4)=3$, ………… 9 分

当且仅当 $\frac{a+5b}{2a+b}=\frac{4(2a+b)}{a+5b}$,即 $a=b=\frac{1}{3}$ 时等号成立,

故 $\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}$ 的最小值为 3. ………… 10 分

关于我们