

数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：人教 A 版选择性必修第一册第一章~第二章第 4 节。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC_1} =$

A. $\overrightarrow{CA_1}$

B. $\overrightarrow{A_1C}$

C. $\overrightarrow{C_1A}$

D. $\overrightarrow{AC_1}$

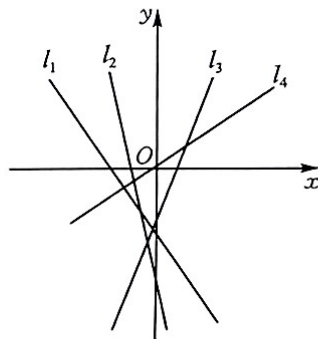
2. 直线 l_1, l_2, l_3, l_4 的图象如图所示，则斜率最小的直线是

A. l_1

B. l_2

C. l_3

D. l_4



3. 若 $a = (-1, 2, -1)$, $b = (1, 3, -2)$, 则 $(a+b) \cdot (a-2b) =$

A. 22

B. -22

C. -29

D. 29

4. 已知 $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底， $m = 2a + 3b - c$, $n = x(a-b) + y(b-c) + 4(a+c)$, 若 $m \parallel n$, 则 $x + y =$

A. 6

B. -6

C. 0

D. 5

5. 已知点 $(1, 2)$ 在圆 $C: x^2 + y^2 - ax - 2y + \frac{5}{4}a = 0$ 外，则实数 a 的取值范围为

A. $\{a \mid a > 4\}$

B. $\{a \mid a > -4\}$

C. $\{a \mid -4 < a < 1, \text{ 或 } a > 4\}$

D. $\{a \mid -4 < a < -1, \text{ 或 } a > 4\}$

6. 点 $A(2, -4)$ 到直线 $l: (1-3m)x + (1-m)y + 4 + 4m = 0$ (m 为任意实数) 的距离的最大值是

A. 5

B. $2\sqrt{5}$

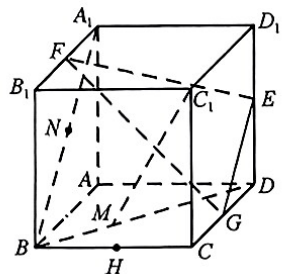
C. 4

D. $\sqrt{5}$

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2, AA_1=AD=4, E$ 为 C_1D_1 的中点, 则点 A 到平面 B_1CE 的距离为
 A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$
8. 已知 $a>0$, 直线 $l_1: x+ay=2a+4$ 与 y 轴的交点为 $A, l_2: 2x+ay=2a+8$ 与 x 轴的交点为 B, l_1 与 l_2 的交点为 C , 则四边形 $OACB$ 的面积的最小值为
 A. $8+4\sqrt{2}$ B. 16 C. $8\sqrt{2}$ D. $16+8\sqrt{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

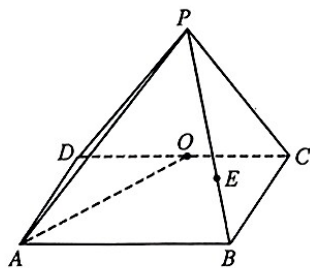
9. 在空间直角坐标系中, 点 P 的坐标为 $(-4, 1, 2)$, 则下列说法正确的是
 A. 点 P 关于原点对称的点是 $(4, -1, -2)$
 B. 点 P 关于 x 轴对称的点是 $(4, 1, 2)$
 C. 点 P 关于平面 Oxz 对称的点是 $(-4, -1, 2)$
 D. 点 P 关于点 $(1, 1, 1)$ 对称的点是 $(6, 1, 0)$
10. 已知直线 $l_1: mx-y-3=0$, 直线 $l_2: 4x-my+6=0$, 则下列命题正确的有
 A. 直线 l_1 恒过点 $(0, -3)$ B. 存在 m 使得直线 l_2 的倾斜角为 90°
 C. 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $m=2$ 或 $m=-2$ D. 存在实数 m 使得 $l_1 \perp l_2$
11. 2023 年暑期档动画电影《长安三万里》重新点燃了人们对唐诗的热情, 唐诗中边塞诗又称出塞诗, 是唐代汉族诗歌的主要题材, 是唐诗当中思想性最深刻, 想象力最丰富, 艺术性最强的一部分。唐代诗人李颀的边塞诗《古从军行》开头两句说: “白日登山望烽火, 黄昏饮马傍交河”。诗中隐含着一个有趣的数学问题——“将军饮马”, 即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发, 先到河边饮马后再回军营, 怎样走才能使总路程最短? 在平面直角坐标系中, 设将军的出发点是 $A(2, 4)$, 军营所在位置为 $B(6, 2)$, 河岸线所在直线的方程为 $x+y-3=0$, 若将军从出发点到河边饮马, 再回到军营 (“将军饮马”) 的总路程最短, 则
 A. 将军从出发点到河边的路线所在直线的方程是 $6x-y-8=0$
 B. 将军在河边饮马的地点的坐标为 $(\frac{13}{8}, \frac{11}{8})$
 C. 将军从河边回军营的路线所在直线的方程是 $x-6y+6=0$
 D. “将军饮马”走过的总路程为 $5\sqrt{2}$
12. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G, H 分别是 DD_1, A_1B_1, CD, BC 的中点, 则下列说法正确的有
 A. E, F, G, H 四点共面
 B. BD 与 EF 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$
 C. 在线段 BD 上存在点 M , 使得 $MC_1 \perp$ 平面 EFG
 D. 在线段 A_1B 上任取一点 N , 三棱锥 $N-EFG$ 的体积为定值



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $\boldsymbol{n}=(-3, 1, 2)$ 是平面 α 的一个法向量, 点 $A(0, -3, 1), B(k, 2k, 4)$ 在平面 α 内, 则 $k=$ _____.
14. 在梯形 $ABCD$ 中, $|CD|=2|AB|=6$, 且 AB 和 CD 所在直线的方程分别是 $x+2y-3=0$ 与 $x+2y+7=0$, 则梯形 $ABCD$ 的面积为 _____.

15. 已知圆 C 经过点 $M(3, -5)$, $N(-1, 3)$, 且圆心 C 在直线 $3x + y + 5 = 0$ 上, 若 P 为圆 C 上的动点, 则线段 OP (O 为坐标原点) 长度的最大值为_____.
16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是矩形, $AB = 2BC = 6$, $PC \perp PD$, $PC = PD$, 点 O 是 CD 的中点, 则线段 PB 上的动点 E 到直线 AO 的距离的最小值为_____.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

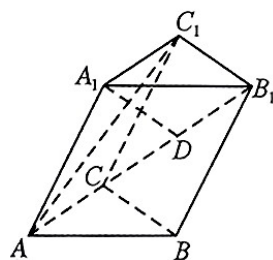
已知 $A(-1, 1)$, $B(2, -2)$, $C(5, 1)$.

- (1) 求点 A 到直线 BC 的距离;
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = AC = AA_1 = 2$, $AB \perp AC$, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60^\circ$, 设 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{AA_1} = \vec{c}$.

- (1) 若 D 为 B_1C 的中点, 求证: $A_1D \perp BC$;
- (2) 求异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

已知直线 l_1 经过 $A(-1, -5)$, $B(3, 3)$ 两点, 直线 l_2 在 x 轴上的截距为 -1 , 且 $l_1 \perp l_2$.

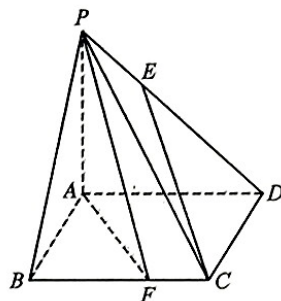
- (1) 求直线 l_1 和直线 l_2 的方程;
- (2) 已知直线 l_3 经过直线 l_1 与直线 l_2 的交点, 且在 x 轴上的截距是在 y 轴上的截距的 3 倍, 求直线 l_3 的方程.

20. (本小题满分 12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是正方形, E, F 分别在棱 PD, BC 上且 $PE = \frac{1}{3}PD, CF = \frac{1}{3}BC$.

(1) 证明: $CE \parallel$ 平面 PAF ;

(2) 若 $AD=AP$, 求直线 CD 与平面 PAF 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B 的坐标为 $(1, -2)$, AB 边上的中线 CM 所在的直线方程为 $2x - y + 1 = 0$, $\angle BAC$ 的平分线所在的直线方程为 $x + 7y - 12 = 0$.

(1) 求点 A 的坐标;

(2) 求直线 AC 的方程.

22. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 四边形 BCC_1B_1 为正方形, 四边形 BB_1A_1A 为菱形, 且 $\angle BB_1A = 60^\circ$, 平面 $BB_1A_1A \perp$ 平面 BCC_1B_1 , M 为棱 CC_1 的中点.

(1) 求证: $BB_1 \perp AM$;

(2) 棱 A_1C_1 (除两端点外) 上是否存在点 N , 使得平面 B_1CN 与平面 B_1C_1N 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{31}}{31}$? 若存在, 请求出点 N 的位置; 若不存在, 请说明理由.

