华大新高考联盟2022届高三3月教学质量测评

数　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卷指定位置，认真核对与准考证号条形码上的信息是否一致，并将准考证号条形码粘贴在答题卷上的指定位置。

2. 选择题的作答：选出答案后，用2B铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试题卷上无效。

3. 非选择题的作答：用黑色墨水的签字笔直接答在答题卷上的每题所对应的答题区域内。答在试题卷上或答题卷指定区域外无效。

4. 考试结束，监考人员将答题卷收回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=2+i(m-ni)$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，若 z 为纯虚数，则

A. $m\neq0,n=-2$　　B. $m\neq-2,n=0$　　C. $m=0,n\neq-2$　　D. $m=-2,n\neq0$

2. 设集合 $A=\{x|(x-3)(x-5)<0\}$，$B=\{x|m<x<7\}$，若 $A\cup B=\{x|3<x<7\}$，则实数 m 的取值范围为

A. $(3,5]$　　B. $[3,5]$　　C. $(3,5)$　　D. $[3,5)$

3. 某大学开设选修课，要求学生根据自己的专业方向以及自身兴趣从6个科目中选择3个科目进行研修，已知某班级 a 名学生对科目的选择如下所示，则 a、b 的一组值可以是

科目	国际金融	统计学	市场管理	二战历史	市场营销	会计学
人数	24	28	14	15	19	b

A. $a=40,b=10$　　B. $a=40,b=30$

C. $a=37,b=21$　　D. $a=37,b=11$

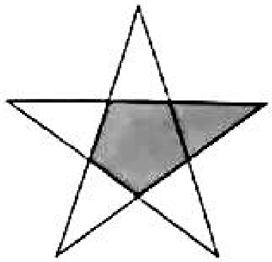
4. 已知圆锥的表面积为 90π，母线与底面所成角为 θ，若 $\cos\theta=\frac{2}{3}$，则圆锥的体积为

A. 108π　　B. $36\sqrt{5}\pi$　　C. $36\sqrt{3}\pi$　　D. 72π

5. 函数 $f(x)=4^x-4x^2$ 的零点个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. "黄金三角形"是几何历史上的瑰宝，它有两种类型，其中一种是顶角为36°的等腰三角形，暂且称为"黄金三角形A"．如图所示，已知五角星是由5个"黄金三角形A"与1个正五边形组成，其中 $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，则阴影部分面积与五角形面积的比值为



第6题图

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}+1}{6}$

D. $\frac{3\sqrt{5}}{20}$

7. 已知下表所示的数据的回归直线为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则 $\hat{b}=$

i	1	2	3	4	5
x_i	3	5	7	9	11
y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

A. 3.15　　B. 4.15　　C. 2.25　　D. 1.25

参考公式：在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

参考数据：$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=686$，$\sum_{i=1}^{5}y_i=80$.

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 M，N 均在双曲线 C 的右支上，其中点 M 在第一象限，M，N，F_2 三点共线，且 $\cos\angle MF_2F_1=-\frac{1}{4}$，若 $\angle MF_1N=\angle MNF_1$，则双曲线 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{5}x$　　B. $y=\pm x$　　C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm\sqrt{2}x$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知 l，m，n 是空间中三条不同的直线，α，β 是空间中两个不同的平面，则下列说法错误的是（　　）

A. 若 $l\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，$l\perp n$，$m\perp n$，则 $n\perp\alpha$

B. 若 $\alpha//\beta$，$l\perp\alpha$，$l\perp m$，$m\not\subset\alpha$，则 $m//\beta$

C. 若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$n//\beta$，$m\perp l$，则 $m\perp n$

D. 若 $l\perp\alpha$，$m\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，$n//l$，则 $m//n$

10. 十二平均律是我国明代音乐理论家和数学家朱载堉发明的．明万历十二年（公元1584年），他写成《律学新说》，提出了十二平均律的理论．十二平均律的数学意义是：在1和2之间插入11个数，使包含1和2的这13个数依次成递增的等比数列，记插入的11个数之和为 M，插入11个数后这13个数之和为 N，则依此规则，下列说法正确的是

A. 插入的第8个数为 $\sqrt{2}$

B. 插入的第5个数是插入的第1个数的 $\sqrt[3]{2}$ 倍

C. $M>3$

D. $N<7$

11. 已知函数 $f(x)=\sin(\cos x)+\cos x$，则下列说法正确的是

A. 直线 $x=\pi$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

B. 函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增

C. 函数 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上单调递增

D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geq 1+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

12. 已知三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，$SA\perp$ 平面 ABC，$SA=AB=BC=\sqrt{2}$，$AC=2$，点 E，F 分别是线段 AB，BC 的中点，直线 AF，CE 相交于点 G，则过点 G 的平面 α 与截三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的外接球 O 所得截面面积可以是

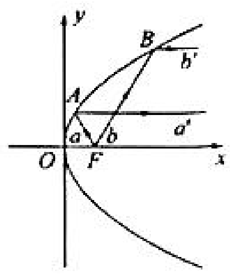
A. $\dfrac{2}{3}\pi$　　B. $\dfrac{8}{9}\pi$　　C. π　　D. $\dfrac{3}{2}\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^8$ 的展开式中 $x^{-\frac{1}{2}}$ 项的系数为________.

14. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=8$，则 $|\boldsymbol{a}|=$________.

15. 抛物线具有以下光学性质：从焦点出发的光线经抛物线反射后平行于抛物线的对称轴。该性质在实际生产中应用非常广泛。如图所示，从抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 向 y 轴正方向发出的两条光线 a，b 分别经抛物线上的 A，B 两点反射，已知两条入射光线与 x 轴所成锐角均为 $60°$，且 $|FA|+|FB|=\dfrac{32}{3}$，则 $p=$________.



第 15 题图

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，图象关于原点对称，其导函数为 $f'(x)$，若当 $x>0$ 时 $f(x)+x\ln x\cdot f'(x)<0$，则不等式 $4^{|x|}\cdot f(x)>4f(x)$ 的解集为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知首项为 $\dfrac{1}{3}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}+(2n+3)a_na_{n+1}=a_n+S_n$.

(1) 记 $b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$，求证：数列 $\{b_n\}$ 为等差数列；

(2) 求 S_n 的值.

18.（12 分）

2021 年 11 月 7 日，在《英雄联盟》S11 的总决赛中，中国电子竞技俱乐部 EDG 完成逆转，斩获冠军，掀起了新一波电子竞技在中国的热潮. 为了调查 A 地 25 岁以下的年轻人的性别与对电子竞技的爱好程度是否具有相关性，研究人员随机抽取了 500 人作出调查，所得数据统计如下表所示：

	热爱电子竞技	对电子竞技无感
男性	200	50
女性	100	

(1)判断是否有99.9%的把握认为A地25岁以下的年轻人的性别与对电子竞技的爱好程度有关?

(2)若按照性别进行分层抽样的方法,从被调查的热爱电子竞技的年轻人中随机抽取15人,再从这15人中任取3人,记抽到的男性人数为X,求X的分布列以及数学期望$E(X)$.

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中$n=a+b+c+d$.

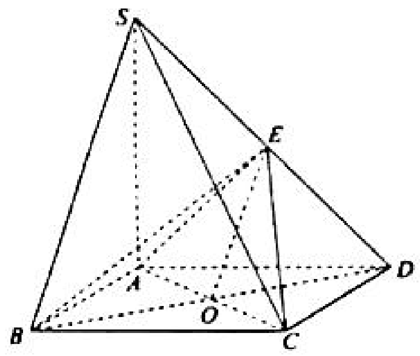
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.(12分)

如图所示,四棱锥S-$ABCD$中,底面$ABCD$为矩形,AC与BD交于点O,点E在线段SD上,且OE//平面SAB,二面角S-AB-C,S-AD-C均为直二面角.

(1)求证:$SE=DE$;

(2)若$SA=AD=2$,且钝二面角A-BE-C的余弦值为$-\dfrac{3\sqrt{20}}{20}$,求AB的值.



第19题图

20.(12分)

已知△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$\sin C=\sqrt{2}\sin B$,$C=2A$,$c=2$.

(1)求证:△ABC是等腰直角三角形;

(2)已知点P在△ABC的内部,且$PB=PC$,$PA=AC$,求$\cos\angle PAB$.

21.(12分)

已知椭圆C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$,且过点$\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$.

(1)求椭圆C的标准方程;

(2)过点$(0,1)$且斜率为k的直线l与椭圆C交于M,N两点,且$G(x_G,t)(t>\sqrt{3})$,若$NG\perp x$轴,求证:存在实数t,使得直线MG过y轴上的定点.

22.(12分)

完成下列问题:

(1)已知函数$f(x)=2e^x-x\cos x-\sin x$,$x\in[0,\pi]$,求函数$f(x)$的最小值;

(2)若关于x的方程$mx\sin x+x=e^x-1(x\in[0,\pi])$有两个实数根,求实数$m$的取值范围.

机密★启用前(新高考卷)

华大新高考联盟2022届高三3月教学质量测评

数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】A

【命题意图】本题考查复数的四则运算、复数的基本概念,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$z=2+i(m-ni)=(n+2)+mi$,故 $m\neq0$,$n=-2$,故选A.

2.【答案】D

【命题意图】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=\{x|(x-3)(x-5)<0\}=\{x|3<x<5\}$;而 $A\cup B=\{x|3<x<7\}$,结合数轴可知,$3\leqslant m<5$,故选D.

3.【答案】D

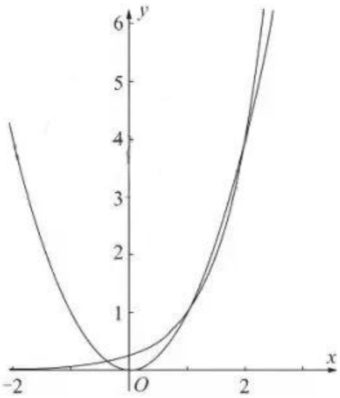
【命题意图】本题考查数学文化、推理与证明,考查数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$3a=24+28+14+15+19+b$,故 $3a=100+b$;观察可知,故选D.

4.【答案】B

【命题意图】本题考查空间角、空间几何体的结构特征、空间几何体的表面积与体积,考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$\cos\theta=\frac{r}{l}=\frac{2}{3}$,故 $r=\frac{2}{3}l$;而 $\pi rl+\pi r^2=\frac{10}{9}\pi l^2=90\pi$,解得 $l=9$,则 $r=\frac{2}{3}l=6$,故圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times\sqrt{81-36}=36\sqrt{5}\pi$,故选B.



第5题图

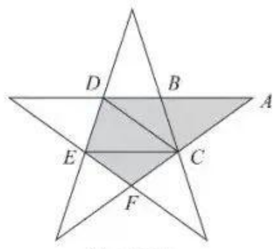
5.【答案】D

【命题意图】本题考查函数的图象与性质、函数的零点,考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】令 $f(x)=0$,得 $4^{x-1}=x^2$;在同一直角坐标系中分别作出 $y=4^{x-1}$,$y=x^2$ 的大致图象如图所示;观察可知,两个函数的图象有3个交点(其中1个交点的横坐标介于-1到0之间,另外两个交点分别为(1,1),(2,4)),故函数 $f(x)=4^x-4x^2$ 的零点个数为3,故选D.

6.【答案】B

【命题意图】本题考查数学文化、几何概型,考查直观想象、数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.



第6题图

【解析】依题意,$\sin18^\circ=\frac{\frac{BC}{2}}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,故 $\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;设 $\triangle ABC$ 的面积为 x,则 $\triangle BCD$ 和 $\triangle CEF$ 的面积均为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}x$,$\triangle CDE$ 的面积为 x,则阴影部分面积与五角形面积的比值为 $\frac{2x+2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}{2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+6x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故选B.

7.【答案】A

【命题意图】本题考查线性回归方程及其应用，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(3-7)^2+(5-7)^2+(9-7)^2+(11-7)^2=40$，而$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}=686-7\times80=126$，故$\hat{b}=\frac{126}{40}=3.15$，故选 A.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为$\angle MF_1N=\angle MNF_1$，故$|MF_1|=|MN|$；设$|MF_1|=x$，则$|MF_2|=x-2a$，则$|NF_2|=|MN|-|MF_2|=2a$，则$|NF_1|=4a$；在$\triangle NF_1F_2$中，由余弦定理，$|NF_1|^2=|F_1F_2|^2+|NF_2|^2-2|F_1F_2||NF_2|\cos\angle NF_2F_1$，化简可得，$2c^2-ac-6a^2=0$，即$2e^2-e-6=0$，解得$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$，则$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，故双曲线$C$的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，故选 C.

二、选择题

9.【答案】ABD

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系，考查直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】A 中，若$l//m$，则$n\perp\alpha$未必成立；B 中，可能有$m\subset\beta$；因为$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$m\perp l$，则$m\perp\beta$，而$n//\beta$，故$l\perp n$，故 C 正确；D 中，$m\perp n$；故选 ABD.

10.【答案】BC

【命题意图】本题考查数学文化、等比数列的通项公式与前n项和公式，考查数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$a_1=1$，$a_{13}=2$，故$q^{12}=2$，故$a_9=a_1q^8=2^{\frac{8}{12}}=\sqrt[3]{4}$，故 A 错误；因为$\frac{a_6}{a_2}=q^4=\sqrt[3]{2}$，故 B 正确；$M=\frac{a_2(1-q^{11})}{1-q}=\frac{\sqrt[12]{2}(1-\sqrt[12]{2^{11}})}{1-\sqrt[12]{2}}=\frac{2^{\frac{1}{12}}-1-1}{1-2^{\frac{1}{12}}}=-1-\frac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}$，要证$M>3$，即证$-1-\frac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}>3$，即证$\frac{1}{2^{\frac{1}{12}}-1}>4$，即证$\frac{5}{4}>2^{\frac{1}{12}}$，即证$\left(\frac{5}{4}\right)^{12}>2$，而$\left(\frac{5}{4}\right)^{12}>(1.5)^6>2$，故 C 正确；而$N=M+3$，要证$N>7$，即证$M>4$，即证$-1-\frac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}>4$，即证$\frac{1}{2^{\frac{1}{12}}-1}>5$，即证$\frac{6}{5}>2^{\frac{1}{12}}$，即证$\left(\frac{6}{5}\right)^{12}>2$，而$\left(\frac{6}{5}\right)^{12}>(1.4)^6>(1.9)^3>2$，故$N>7$，D 错误，故选 BC.

11.【答案】AC

【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$f(2\pi-x)=\sin[\cos(2\pi-x)]+\cos(2\pi-x)=\sin(\cos x)+\cos x=f(x)$，故 A 正确；易知$f(x+2\pi)=f(x)$，故$2\pi$为函数$f(x)$的一个周期；当$x\in[0,\pi]$时，$\cos x\in[-1,1]$，故$y=\sin(\cos x)$，$y=\cos x$在$[0,\pi]$上单调递减，即$f(x)=\sin(\cos x)+\cos x$在$[0,\pi]$上单调递减，由对称性可知，函数$f(x)$在$[\pi,2\pi]$上单调递增，故 B 错误，C 正确；结合单调性以及函数的奇偶性可知，函数$f(x)$的最大值为$f(0)=\sin1+1<1-\sin\frac{5\pi}{12}=1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，故 D 错误；故选 AC.

12.【答案】BCD

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的表面积与体积，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为$AB^2+BC^2=AC^2$，故$AB\perp BC$，故三棱锥$S\text{-}ABC$的外接球O的半径$R=\frac{\sqrt{2+2+2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$；取$AC$的中点$D$，连接$BD$必过点$G$，因为$AB=BC=\sqrt{2}$，故$DG=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}$，因为$OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$OG^2=$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{11}{18}$，则过点 G 的平面截球 O 所得截面圆的最小半径 $r^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\frac{11}{18}=\frac{8}{9}$，故截面面积的最小值为 $\frac{8\pi}{9}$，最大值为 $\pi R^2=\frac{3}{2}\pi$，故选 BCD.

三、填空题

13.【答案】-448.

【命题意图】本题考查二项式定理，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)^8$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(2x^{\frac{1}{2}})^{8-r}\cdot(-x^{-\frac{3}{5}})^r=C_8^r\cdot 2^{8-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{4-\frac{11}{10}r}$；令 $4-\frac{11}{10}r=-\frac{3}{2}$，解得 $r=5$，故所求系数为 $C_8^5\cdot 2^3\cdot(-1)^5=-448$.

14.【答案】$4\sqrt{2}$.

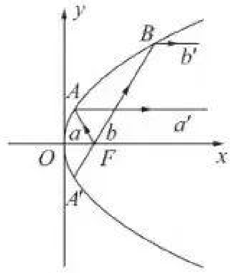
【命题意图】本题考查平面向量的数量积及其应用，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$；而 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=8$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，故 $\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=45^\circ$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 45^\circ=8$，解得 $|\boldsymbol{a}|=4\sqrt{2}$.

15.【答案】4.

【命题意图】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线综合性问题，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】如图所示，延长 BF 交抛物线 C 于点 A'，则 $|FA|+|FB|=|A'B|=\frac{32}{3}=\frac{2p}{\sin^2 60^\circ}$，解得 $p=4$.



第 15 题图

16.【答案】$(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

【命题意图】本题考查函数的图象与性质、导数的几何意义，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】当 $x>0$ 时，$f(x)+x\ln x\cdot f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}+\ln x\cdot f'(x)<0\Leftrightarrow[\ln x\cdot f(x)]'<0$，故函数 $g(x)=\ln x\cdot f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，易知 $g(1)=0$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)>0$，$f(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，$f(x)<0$；而 $4^{|x|}\cdot f(x)>4f(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot[4^{|x|}-4]>0$，而 $h(x)=f(x)\cdot[4^{|x|}-4]$ 为奇函数，则当 $x>0$ 时，当 $f(x)\cdot[4^{|x|}-4]>0$ 的解为 $0<x<1$，故当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)\cdot[4^{|x|}-4]>0$ 的解为 $x<-1$ 或 $0<x<1$，故不等式 $4^{|x|}\cdot f(x)>4f(x)$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

四、解答题

17.【命题意图】本题考查数列的递推公式、数列求和，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$(2n+3)a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$，则 $2n+3=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}$，

故 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2n+3=b_n$. ………………………………（2 分）

故 $b_{n+1}-b_n=2n+5-2n-3=2$，

故数列 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列. ………………………………（4 分）

(2)由(1)可知 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2n+1$，$\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}=2n-1$，…，$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=5$，

累加可得，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=\frac{(2n+1+5)(n-1)}{2}$. ………………………………（6 分）

故 $a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. ………………………………（7 分）

$S_{98}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{14651}{19800}$. ………………（10 分）

18.【命题意图】本题考查独立性检验、超几何分布、离散型随机变量的分布列以及数学期望，考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)完善表格如下所示：

	热爱电子竞技	对电子竞技无感	总计
男性	200	50	250
女性	100	150	250
总计	300	200	500

……………………………………（2 分）

则 K^2 的观测值 $k=\frac{500\times(200\times150-100\times50)^2}{250\times250\times300\times200}=\frac{250}{3}\approx83.333>10.828$. ………………………（5 分）

有 99.9%的把握认为 A 地 25 岁以下的年轻人的性别与对电子竞技的爱好程度有关. …………（6 分）

(2)依题意，这 15 人中男生有 10 人，女生有 5 人，则 X 的可能取值为 0，1，2，3，故

$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{5\times4\times3}{15\times14\times13}=\frac{2}{91}$，$P(X=1)=\frac{C_5^2C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{5\times2\times10}{5\times7\times13}=\frac{20}{91}$，

$P(X=2)=\frac{C_5^1C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{5\times5\times9}{5\times7\times13}=\frac{45}{91}$，$P(X=3)=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{10\times9\times8}{15\times14\times13}=\frac{24}{91}$. …………………………（8 分）

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{24}{91}$

……………………………………………………（10 分）

则 $E(X)=1\times\frac{20}{91}+2\times\frac{45}{91}+3\times\frac{24}{91}=2$. ……………………………………………………（12 分）

19.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求二面角，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)因为 $OE//$平面 SAB，$OE\subset$平面 SBD，平面 $SAB\cap$平面 $SBD=SB$，

故 $OE//SB$. ……………………………………………………………（3 分）

因为四边形 $ABCD$ 为矩形，故 $BO=DO$，则 $SE=DE$. ……………………………………………（4 分）

(2)∵四边形 $ABCD$ 为矩形，∴$AB\perp AD$.

∵平面 $SAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，∴$AB\perp$平面 SAD.

∵$SA\subset$平面 SAD，∴$AB\perp SA$. 同理 $AD\perp SA$.

又 $AB\cap AD=A$，$AB\subset$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，

∴$SA\perp$平面 $ABCD$. ……………………………（6 分）

设 $AB=a$，以 A 为坐标原点，AB，AD，AS 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(a,0,0)$，$C(a,2,0)$，$D(0,2,0)$，$E(0,1,1)$，$S(0,0,2)$.

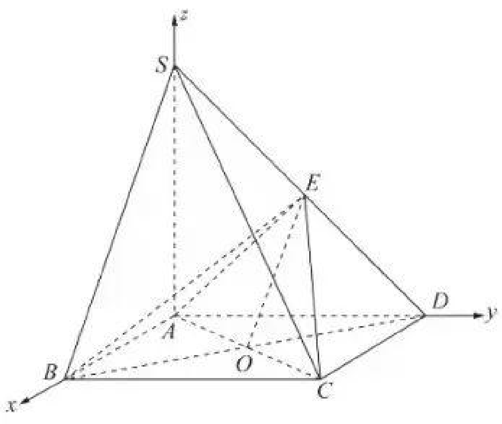
……………………………………………（7 分）

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面 ABE 的法向量，

∵$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=0,\\ y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $z=-1$，.

∴平面 ABE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,-1)$. ………（8 分）

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 CBE 的法向量，



第 19 题图

$\because \begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0, \end{cases} \therefore \begin{cases} -2y=0, \\ -ax-y+z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$，则 $z=a$.

∴平面 CBE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,a)$. ……………………………………………… (10 分)

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\,|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-a}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+1}}=-\dfrac{3\sqrt{20}}{20}$，解得 $a=3=AB$. ………………………………… (12 分)

20.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$\sin C=\sin 2A=2\sin A\cos A$，即 $c=2a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$， ………………………… (1 分)

而 $\sin C=\sqrt{2}\sin B$，故 $c=\sqrt{2}b$，故 $a^3-2\sqrt{2}=6a-6\sqrt{2}$. ……………………………………………… (2 分)

即 $(a-\sqrt{2})(a^2+\sqrt{2}a+2)=6(a-\sqrt{2})$，化简可得 $(a-\sqrt{2})^2(a+2\sqrt{2})=0$，

因为 $a>0$，故 $a=\sqrt{2}=b$. ……………………………………………………………………… (4 分)

而 $a^2+b^2=c^2$，故△ABC 是等腰直角三角形. ………………………………………………………… (5 分)

(2)由(1)可知，$C=\dfrac{\pi}{2}$，设∠$PAC=\alpha$，其中 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，

而 $PA=AC$，则∠$PCA=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$，∠$PCB=\dfrac{\alpha}{2}$. ……………………………………………………… (6 分)

取 BC 的中点 D，则 $PD\perp BC$，故 $PC=\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. ……………………………………………… (7 分)

又 $AP=AC=\sqrt{2}$，在△APC 中，由正弦定理，$\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}$ ………………………… (9 分)

化简可得，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………………………… (10 分)

因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$， ………………………………………………………………… (11 分)

故 $\cos\angle PAB=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ……………………………………………………… (12 分)

21.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆综合性问题，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$\begin{cases} \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1, \\ a^2-b^2=c^2, \end{cases}$ ……………………………………………………… (2 分)

解得 $a^2=4$，$b^2=3$，故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………… (4 分)

(2)当 $M(-2,0)$，$N\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$G(1,t)$ 时，直线 MG 的方程为 $y=\dfrac{t}{3}(x+2)$，交 y 轴于点 $\left(0,\dfrac{2}{3}t\right)$；

当 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$N(-2,0)$，$G(-2,t)$ 时，直线 MG 的方程为 $y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{t-\frac{3}{2}}{-3}(x-1)$，交 y 轴于点 $\left(0,\dfrac{t+3}{3}\right)$.

若直线 MG 经过 y 轴上定点，则 $\dfrac{2}{3}t=\dfrac{t+3}{3}$，即 $t=3$，直线 MG 交 y 轴于点 $(0,2)$. ………… (6 分)

下面证明存在实数 $t=3$，使得直线 MG 经过 y 轴上定点 $(0,2)$.

联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消 y 整理，得 $(4k^2+3)x^2+8kx-8=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{-8}{4k^2+3}$. ……………………………………………… (8 分)

设点 $G(x_2,3)$，所以直线 MG 的方程：$y-3=\dfrac{y_1-3}{x_1-x_2}(x-x_2)$. ……………………………………………… (9 分)

令 $x=0$，得 $y=\dfrac{-x_2y_1+3x_2}{x_1-x_2}+3=\dfrac{3x_1-x_2y_1}{x_1-x_2}=\dfrac{3x_1-x_2(kx_1+1)}{x_1-x_2}=\dfrac{3x_1-x_2-kx_1x_2}{x_1-x_2}$.

因为 $kx_1x_2=x_1+x_2$，所以 $y=\dfrac{3x_1-x_2-(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{2x_1-2x_2}{x_1-x_2}=2$. ………………………………… (11 分)

所以直线 MG 过定点 $(0,2)$.

综上所述，存在实数 $t=3$，使得直线 MG 经过 y 轴上定点 $(0,2)$. ………………………………… (12 分)

22.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1) 依题意，$f'(x)=2e^x+x\sin x-2\cos x$.

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $e^x\geqslant 1$，$x\sin x\geqslant 0$，因此 $f'(x)\geqslant 2-2\cos x\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，于是 $f(x)\geqslant f(0)=2$，

故函数 $f(x)$ 的最小值为 2. ……………………………………………………………………………… (4 分)

(2) 令 $g(x)=e^x-1-mx\sin x-x$，$g'(x)=e^x-m(\sin x+x\cos x)-1$，

当 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)\geqslant e^x-\dfrac{1}{2}x\sin x-x-1$，

由 (1) 可知，当 $x\in(0,\pi]$ 时，$e^x-\dfrac{1}{2}x\sin x-x-1>0$，

∴当 $x\in(0,\pi]$ 时，$g(x)>0$. 而 $g(0)=0$，∴当 $x\in[0,\pi]$ 时，$g(x)$ 仅有 1 个零点，舍去. ………… (5 分)

当 $m>\dfrac{1}{2}$ 时，$g'(x)=e^x-m(x\cos x+\sin x)-1$，$g''(x)=e^x+m(x\sin x-2\cos x)$. ……………… (6 分)

当 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 时，$g''(x)>0$，所以 $g'(x)$ 单调递增. ……………………………………………… (7 分)

当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$g'''(x)=e^x+m(3\sin x+x\cos x)$.

因为 $e^x>0$，$m(3\sin x+x\cos x)\geqslant 0$，所以 $g'''(x)>0$，所以 $g''(x)$ 单调递增. ……………………… (8 分)

又 $g''(0)=1-2m<0$，$g''(\dfrac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{\pi}{2}m>0$，

因此 $g''(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上存在唯一的零点 x_0，且 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. ……………………………………… (9 分)

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g''(x)<0$，所以 $g'(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$g''(x)>0$，所以 $g'(x)$ 单调递增.

又 $g'(0)=0$，$g'(x_0)<g'(0)=0$，$g'(\pi)=e^\pi+m\pi-1>0$，

因此 $g'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上存在唯一的零点 x_1，且 $x_1\in(x_0,\pi)$. …………………………………………… (10 分)

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_1,\pi)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增.

又 $g(0)=0$，$g(x_1)<g(0)=0$，$g(\pi)=e^\pi-\pi-1>0$，

所以 $g(x)$ 在 (x_1,π) 上存在唯一零点，因此 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点. ………………………… (11 分)

综上所述，实数 m 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………………………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。