中学生标准学术能力诊断性测试2022年1月测试

数学试卷

本试卷共150分，考试时间120分钟.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x\in N^*|1<x<5\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 已知 $z=2+i$，则 $\overline{z}(z+i)=$

A. $6-2i$　　B. $4-2i$　　C. $6+2i$　　D. $4+2i$

3. 已知圆锥的底面半径为2，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的侧面积为

A. 4π　　B. $8\sqrt{2}\pi$　　C. $4\sqrt{2}\pi$　　D. 8π

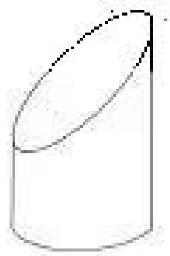
4. 美学四大构件是：史诗、音乐、造型（绘画、建筑等）和数学. 素描是学习绘画的必要一步，它包括了明暗素描和结构素描，而学习几何体结构素描是学习素描最重要的一步. 某同学在画"切面圆柱体"（用与圆柱底面不平行的平面去截圆柱，底面与截面之间的部分叫做切面圆柱体）的过程中，发现"切面"是一个椭圆（如图所示），若"切面"所在平面与底面成30°角，则该椭圆的离心率为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{1}{3}$



（第4题图）

5. 过点 $P(1,-2)$ 作圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则 AB 所在直线的方程为

A. $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $y=-\frac{1}{2}$　　C. $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $y=-\frac{1}{4}$

6. 椭圆 $C:mx^2+ny^2=1$ 与直线 $y=1-\sqrt{3}x$ 交于 M，N 两点，过原点与线段 MN 中点的直线的

斜率为$\frac{2}{3}$，则$\frac{m}{n}$的值为

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{27}$　　C．$\frac{9\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7．若$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$，则$\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$

A．$-\frac{6}{5}$　　B．$-\frac{2}{5}$　　C．$\frac{6}{5}$　　D．$\frac{2}{5}$

8．已知奇函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数，$g(x)=xf(x)$．若$a=g(-2^{0.5})$，$b=g(-\log_2 0.2)$，$c=g(3)$，则a，b，c的大小关系为

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．下列命题中，真命题的是

A．样本数据$x_i(i=1,2,\dots,n)$与样本数据$y_i=x_i-c(i=1,2,\dots,n)$，c为非零常数，两组样本数据的样本平均数相同

B．数据12，14，15，17，19，23，27，30的第70百分位数是23

C．$(x-y)^n$的二项展开式中，第r项的二项式系数是C_n^r

D．命题"$\exists x\in[1,2]$，$x+\frac{1}{x}-a=0$"是真命题的充要条件为$a\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$

10．设函数$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，则下列结论正确的是

A．函数$y=f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$为奇函数

B．函数$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减

C．函数$f(x)$在$(0,2\pi)$有且仅有2个极小值点

D．把函数$g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图像上各点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，得到函数$f(x)$的图像

11．已知O为坐标原点，点$P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,2\sin\beta)$，$A(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$，

第2页　共4页

$B(2,0)$，则下列结论正确的是

A. $\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{OQ}\right|$

B. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

C. 记 w 是 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值，则 $w=2$

D. 记 $\Omega=\left\{(P,Q)\middle|\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\text{取最大值，}0\le\alpha<2\pi，0\le\beta<2\pi\right\}$，则 Ω 中有且只有 4 个元素

12. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$，$F_1$，$F_2$ 分别为左、右焦点，设点 P 是在双曲线上且在第一象限的动点，点 I 为 ΔPF_1F_2 的内心，$A(0,4)$，则下列说法正确的是

A. 双曲线 C 的渐近线方程为 $\dfrac{x}{4}\pm\dfrac{y}{5}=0$

B. 点 I 的运动轨迹为双曲线的一部分

C. 若 $\left|PF_1\right|=2\left|PF_2\right|$，$\overrightarrow{PI}=x\overrightarrow{PF_1}+y\overrightarrow{PF_2}$，则 $y-x=\dfrac{2}{9}$

D. $\left|PA\right|+\left|PF_1\right|$ 的最小值为 9

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_n=2a_n+2$，则 $S_6=$________．

14. 已知空间三点 $A(1,1,-1)$，$B(2,2,-2)$，$C(0,0,1)$，则点 C 到直线 AB 的距离为________．

15. 已知四个函数：①$y=-x$，②$y=x^2$，③$y=2^x$，④$y=\ln x$，从中任选 2 个，则事件"所选 2 个函数的图像有且仅有一个公共点"的概率为________．

16. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的所有棱长都为 2，且球 O 为三棱锥的外接球，点 M 是线段 BD 上靠近 D 点的三等分点，过点 M 作平面 α 截球 O 得到的截面面积为 S，则 S 的取值范围为________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （10 分）设 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，已知 $a_1=1$，a_4 是 a_2，a_8 的等比中项．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

18. （12 分）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos^2 A-\sin^2 A+\dfrac{1}{2}=0$．

（1）求角 A 的值；

（2）若 ΔABC 为锐角三角形，设 $a=\sqrt{19}$，$b=5$，求 ΔABC 的面积．

19. （12分）已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为32，24，24．现采用分层抽样的方法从中抽取10人进行睡眠时间的调查．

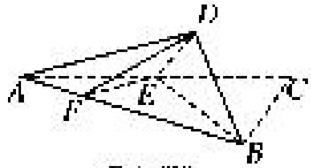
（1）应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人？

（2）若抽出的10人中有6人睡眠不足，4人睡眠充足，现从这10人中随机抽取3人做进一步的身体检查．

①用X表示抽取的3人中睡眠不足的员工人数，求随机变量X的分布列与数学期望；

②设A为事件"抽取的3人中，既有睡眠充足的员工，也有睡眠不足的员工"，求事件A发生的概率．

20. （12分）在$Rt\Delta ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=4$，$BC=2$，E是AC的中点，F是线段AB上一个动点，且$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}(0<\lambda<1)$，如图所示，沿$BE$将$\Delta CEB$翻折至$\Delta DEB$的位置，使得平面$DEB\perp$平面$ABE$．


第20题图

（1）当$\lambda=\dfrac{1}{3}$时，证明：$BD\perp$平面DEF；

（2）是否存在实数λ，使三棱锥$B-DEF$的体积为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$？若不存在，请说明理由；若存在，求出λ的值，并求出DF与平面ADE所成角的正弦值．

21. （12分）在平面直角坐标系xOy中，已知动圆P与圆$O_1:x^2-2x+y^2=0$内切，且与直线$x=-2$相切，设动圆圆心P的轨迹为曲线C．

（1）求曲线C的方程；

（2）曲线C上存在一点$S(4,y_0)(y_0>0)$，不经过点S的直线l与C交于A，B两点，若直线AS、BS的斜率之和为2，证明：直线l过定点．

22. （12分）已知函数$f(x)=\ln x-ax+\dfrac{a}{x}(a>0)$．

（1）当$a=\dfrac{1}{2}$时：

①解关于x的不等式$f(x)>0$；

②证明：$\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)<e^{\frac{3}{4}}(n\in N^*,n\geq 2)$；

（2）若函数$g(x)=f(x)-\ln 2+\dfrac{3a}{x}$恰有三个不同的零点，求实数$a$的取值范围．

中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 1 月测试

数学参考答案

一、选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	D	A	B	D	C	A

二、多项选择题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **3** 分，有选错的得 **0** 分．

9	10	11	12
BCD	ABC	BC	CD

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．

13．-126　　14．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　15．$\dfrac{1}{3}$　　16．$\left[\dfrac{8\pi}{9},\dfrac{3\pi}{2}\right]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

（1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，

由题可知$a_4^2=a_2\cdot a_8$，$\therefore (a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+7d)$

由$a_1=1$，$d\neq 0$解得$d=1$．$\therefore a_n=n$ ……………………………………………………4 分

（2）由（1）知$a_n=n$，故$b_n=n\cdot 2^n$，

$\therefore T_n=1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$　　①

①×2⇒　$2T_n=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$　②

①−②得$-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=-2+(1-n)\cdot 2^{n+1}$

$\therefore T_n=2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$ ……………………………………………………………10 分

18．（12 分）

（1）$\cos^2 A-\sin^2 A+\dfrac{1}{2}=\cos 2A+\dfrac{1}{2}=0$，$A\in(0,\pi)$

解得$2A=\dfrac{2}{3}\pi$或$\dfrac{4}{3}\pi$，即$A=\dfrac{1}{3}\pi$或$\dfrac{2}{3}\pi$ ……………………………………5 分

（2）由ΔABC为锐角三角形得$A=\dfrac{1}{3}\pi$，

由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，化为$c^2-5c+6=0$，解得$c=2$或3，

若$c=2$，则$\cos B=\dfrac{19+4-25}{2\times\sqrt{19}\times 2}<0$，即$B$为钝角，$\therefore c=2$不成立，

5
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

则 $c=3$，经检验符合条件，

ΔABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ ……………………………………12 分

19.（12 分）

（1）由已知，甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为 4：3：3，采用分层抽样的方法从中抽取 10 人，因此应从甲、乙、丙三个部分的员工中分别抽取 4 人，3 人，3 人 …………………………2 分

（2）①随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3

$$P(X=k)=\frac{C_6^kC_4^{3-k}}{C_{10}^3}(k=0,1,2,3)$$

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{9}{5}$ …………………………7 分

（2）②设事件 B 为“抽取的 3 人中，睡眠充足的员工有 1 人，睡眠不足的员工有 2 人”，

事件 C 为“抽取的 3 人中，睡眠充足的员工有 2 人，睡眠不足的员工有 1 人”，

则 $A=B\cup C$ 且 B 与 C 互斥，

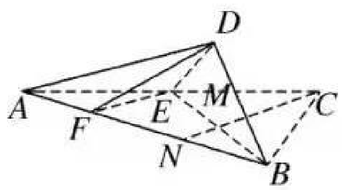
由（1）知，$P(B)=P(X=2)$，$P(C)=P(X=1)$

故 $P(A)=P(B\cup C)=P(X=2)+P(X=1)=\frac{4}{5}$

所以，事件 A 发生的概率为 $\frac{4}{5}$ ………………………………………………………………12 分

20.（12 分）

（1）在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，即 $AC\perp BC$，则 $BD\perp DE$，



取 BF 的中点 N，连接 CN 交 BE 于点 M，

当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，F 是 AN 的中点，而 E 是 AC 的中点，

$\therefore EF$ 是 ΔANC 的中位线，$\therefore EF\,//\,CN$

在 ΔBEF 中，N 是 BF 的中点，$\therefore M$ 是 BE 的中点，

在 $Rt\Delta BCE$ 中，$EC=BC=2$，$\therefore CM\perp BE$，则 $EF\perp BE$，

又平面 $DEB\perp$ 平面 ABE，平面 $DEB\cap$ 平面 $ABE=BE$，$EF\subset$ 平面 ABE，

$\therefore EF\perp$ 平面 DEB，又 $BD\subset$ 平面 DEB

$\therefore EF\perp BD$，而 $EF\cap DE=E$，$EF,DE\subset$ 平面 DEF

$\therefore BD\perp$ 平面 DEF ……………………………………………………………………5 分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

（2）取 BE 的中点 G，连接 DG，则 $DG\perp BE$，而平面 $DEB\perp$ 平面 ABC，

$\therefore DG\perp$ 平面 ABC，且 $DG=\sqrt{2}$，$V_{B-DEF}=\frac{1}{3}DG\cdot S_{\Delta BEF}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times S_{\Delta BEF}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

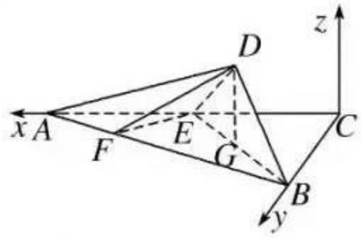
$\therefore S_{\Delta BEF}=1=S_{\Delta BEA}-S_{\Delta AEF}$，$\therefore F$ 到 AE 的距离为 1，

$\therefore F$ 为 AB 的中点，此时 $\lambda=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………7 分

以 C 为坐标原点，CA 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系．则 $C(0,0,0)$，$A(4,0,0)$，$B(0,2,0)$，$E(2,0,0)$，$F(2,1,0)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-4,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-2,0,0)$，$D(1,1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AD}=(-3,1,\sqrt{2})$，

设平面 ADE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，



则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2x=0\\ -3x+y+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=-1$，则 $x=0$，$y=\sqrt{2}$，

$\therefore \vec{n}=(0,\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{DF}=(1,0,-\sqrt{2})$

设 DF 与平面 ADE 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{DF},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{DF}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{DF}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore DF$ 与平面 ADE 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ………………………………………………12 分

21．（12 分）

（1）由题意可知，动圆圆心 P 到点 $(1,0)$ 的距离与到直线 $x=-1$ 的距离相等，

所以点 P 的轨迹是以 $(1,0)$ 为焦点，直线 $x=-1$ 为准线的抛物线．

所以曲线 C 的方程为 $y^2=4x$ ……………………………………………………………………4 分

（2）将 $x=4$ 代入 $y^2=4x$ 可得 $y_0=4$ 或 $y_0=-4$（舍），所以点 S 坐标为 $(4,4)$，

因为直线 l 的斜率不等于 0，设直线 l 的方程是 $x=my+n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y^2=4x\\ x=my+n\end{cases}$，得 $y^2-4my-4n=0$，

因为直线 l 与 C 有两个交点，$\Delta=16m^2+16n>0$，即 $m^2+n>0$

由韦达定理得 $\begin{cases}y_1+y_2=4m\\ y_1y_2=-4n\end{cases}$ ……………………………………………………………………8 分

因为直线 AS，BS 的斜率之和为 2，

$\therefore \frac{y_1-4}{x_1-4}+\frac{y_2-4}{x_2-4}=\frac{y_1-4}{\frac{y_1^2}{4}-4}+\frac{y_2-4}{\frac{y_2^2}{4}-4}=4\left(\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}\right)=\frac{4(y_1+y_2+8)}{y_1y_2+4(y_1+y_2)+16}=2$

$\therefore 2y_1y_2+4(y_1+y_2)=0$

将 $\begin{cases}y_1+y_2=4m\\ y_1y_2=-4n\end{cases}$ 代入上式可得：$-8n+16m=0$，即 $n=2m$

此时$\Delta>0$即$m<-2$或$m>0$，直线l与抛物线有两个交点

所以直线l的方程是$x=my+n=m(y+2)$，它过定点$(0,-2)$……………………………12分

22.（12分）

（1）①当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}=-\frac{(x-1)^2}{2x^2}\le 0$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上是单调递减函数

又$f(1)=0$，$f(x)>0$解集为$x\in(0,1)$ ……………………………………………………4分

②证明：由①知当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)<0$，即$\ln x<\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$

令$x=1+\frac{1}{n^2}(n\in \mathbf{N}^*,n\ge 2)$，

则$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1+2n^2}{2n^2(n^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}\right)$

$<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$……………………………………………………6分

从而$\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<e^{\frac{3}{4}}(n\in \mathbf{N}^*,n\ge 2)$……………………………7分

（2）$g(x)=\ln\frac{x}{2}-ax+\frac{4a}{x}(x>0)$

$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}-a-\frac{4a}{x^2}=\frac{-ax^2+x-4a}{x^2}(x>0)$

设$k(x)=-ax^2+x-4a$，则$\Delta=1-16a^2$，

①当$\begin{cases}\Delta\le 0\\ a>0\end{cases}$，即$a\ge\frac{1}{4}$时，$g'(x)\le 0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减

$\therefore g(x)$不可能有三个不同的零点；

②当$\begin{cases}\Delta>0\\ a>0\end{cases}$，即$0<a<\frac{1}{4}$时，$k(x)$有两个零点：$x_1=\frac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a}$

$\therefore x_2>x_1>0$

又$\because k(x)=-ax^2+x-4a$开口向下

所以当$0<x<x_1$时，$k(x)<0$，即$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$在$(0,x_1)$上单调递减；

当$x_1<x<x_2$时，$k(x)>0$，即$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$在(x_1,x_2)上单调递增；

当$x>x_2$时，$k(x)<0$，即$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$在$(x_2,+\infty)$上单调递减.

$\because g(2)=\ln 1-2a+\frac{4a}{2}=0$，且$x_1x_2=4$，$\therefore x_1<2<x_2$

$\therefore g(x_1)<g(2)=0<g(x_2)$

$\because g\left(\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{2a^2}-a\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{4a}{\frac{1}{a^2}}=-\ln 2-2\ln a-\frac{1}{a}+4a^3$

所以令$m(a)=-\ln 2-2\ln a-\frac{1}{a}+4a^3$

则$m'(a)=-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+12a^2=\frac{12a^4-2a+1}{a^2}>\frac{1-2a}{a^2}>0$

$\therefore m(a)$在$\left(0,\frac{1}{4}\right)$单调递增

$\therefore m(a)<m\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln 2-2\ln\left(\frac{1}{4}\right)-4+4\left(\frac{1}{4}\right)^3=3\ln 2-4+\frac{1}{16}<0$，即$g\left(\frac{1}{a^2}\right)<0$

又$x_2-\frac{1}{a^2}<\frac{2}{2a}-\frac{1}{a^2}=\frac{a-1}{a^2}<0$，$\therefore x_2<\frac{1}{a^2}$

所以由零点存在性定理知，$g(x)$在区间$\left(x_2,\frac{1}{a^2}\right)$上有唯一的一个零点$x_0$

$\because g(x_0)+g\left(\frac{4}{x_0}\right)=\ln\frac{x_0}{2}-ax_0+\frac{4a}{x_0}+\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x_0}\right)-a\cdot\frac{4}{x_0}+\frac{4a}{\frac{4}{x_0}}=0$

且$g(x_0)=0$，$\therefore g\left(\frac{4}{x_0}\right)=0$

又$\frac{4}{x_0}<\frac{4}{\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a}}=\frac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a}=x_1$，$\therefore 0<\frac{4}{x_0}<x_1$

$\therefore g(x)$在区间$(0,x_1)$上有唯一的一个零点$\frac{4}{x_0}$，

故当$0<a<\frac{1}{4}$时，$g(x)$存在三个不同的零点$\frac{4}{x_0},2,x_0$

故实数a的取值范围是$\left(0,\frac{1}{4}\right)$……………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。