

长安一中 2022-2023 学年度第二学期期末考试

高二数学文科试题答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	B	C	A	D	A	D	D	B	B

二、填空题

13. 24 14.1 15. $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$ 16. 678

三、解答题

17、【详解】解：(1) 因为 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n \text{ 为奇数时} \\ a_n - 2, n \text{ 为偶数时} \end{cases}$

所以, $b_{n+1} = a_{2n+1} = a_{2n} - 2 = a_{2n-1} + 1 - 2 = a_{2n-1} - 1 = b_n - 1$,

且 $b_1 = a_1 = 1$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 -1 的等差数列; -----4 分

(2) $\{c_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的偶数项组成的数列,

$$c_1 = a_2 = a_1 + 1 = 2$$

$$c_2 = a_4 = a_3 + 1 = a_2 - 2 + 1 = 1$$

$$c_3 = a_6 = a_5 + 1 = a_4 - 2 + 1 = 0$$

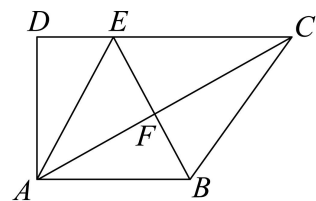
因为 $c_{n+1} = a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1 = a_{2n} - 2 + 1 = a_{2n} - 1 = c_n - 1$,

所以数列 $\{c_n\}$ 是首项为 2, 公差为 -1 的等差数列, -----8 分

结合 (1) 可知, $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项都是以 -1 为公差的等差数列,

$$\begin{aligned} S_{50} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{49}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{50}) \\ &= 1 \times 25 + \frac{25 \times 24}{2} \times (-1) + 2 \times 25 + \frac{25 \times 24}{2} \times (-1) = -525 \end{aligned} \quad \text{-----12 分}$$

18、【详解】(1) 证明：如图所示：



连接 AC, 交 BE 于 F,

因为 $\angle D = 90^\circ$, $AB = 4$, $DC = 6$, $AD = 2\sqrt{3}$, $\overline{CE} = 2\overline{ED}$, 所以 $AE = 4$,

又 $AB \parallel CD$, 所以四边形 $ABCE$ 是菱形, 所以 $FC \perp BE$,

在 $\triangle ACD$ 中, $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 4\sqrt{3}$,

所以 $AF = CF = 2\sqrt{3}$, 又 $AC_1 = 2\sqrt{6}$, 则 $AC_1^2 = AF^2 + CF^2$,

所以 $CF \perp AF$, 又 $AF \cap BE = F$, 所以 $CF \perp$ 平面 $ABED$,

又因为 $CF \subset$ 平面 BCF , 所以平面 $BCE \perp$ 平面 $ADEB$ -----6 分

(2) 设点 D 到平面 BC_1E 的距离为 h ,

因为 $S_{\triangle C_1BE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, $S_{\triangle DBE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, $C_1F = 2\sqrt{3}$ -----10 分

且 $V_{C_1-DBE} = V_{D-C_1BE}$, 所以 $\frac{1}{3} \times h \times S_{\triangle C_1BE} = \frac{1}{3} \times C_1F \times S_{\triangle DBE}$, 解得 $h = \sqrt{3}$; -----12 分

19. 【详解】(1) 由题意知 $100 \times (0.0015 + a + 0.0025 + 0.0015 + 0.001) = 1$,

解得 $a = 0.0035$, -----2 分

样本平均数 $\bar{x} = 500 \times 0.15 + 600 \times 0.35 + 700 \times 0.25 + 800 \times 0.15 + 900 \times 0.10 = 670$,

中位数 650, 众数 600. -----5 分

(2) 由题可知, 样本中男生 50 人, 女生 50 人, 属于“高分选手”的 25 人, 其中女生 10 人; 得出以下 2×2 列联表;

	属于“高分选手”	不属于“高分选手”	合计
男生	10	40	50
女生	15	35	50
合计	25	75	100

$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100(10 \times 35 - 15 \times 40)^2}{25 \times 75 \times 50 \times 50} = \frac{4}{3} < 5.024$, -----11 分

所以没有 97.5 % 的把握认为该校学生属于“高分选手”与性别有关. -----12 分

20. 【详解】(1) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{e^x}$, 令 $f'(x) = 0$ 可得 $x = 1$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x < 0$.

于是 $f(x)$ 增函数区间为 $(0, 1)$; 单调减区间为 $(1, +\infty)$. -----4 分

$$(2) g(x) = (x^2 + x) \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{e^x} = \frac{1 - x^2 - (x^2 + x) \ln x}{e^x} = \frac{x+1}{e^x} (1 - x - x \ln x), x \in (0, +\infty)$$

因此对任意的 $x > 0$, $g(x) < 1 + e^{-2}$ 等价于 $(1 - x - x \ln x) < \frac{e^x}{x+1} (1 + e^{-2})$ -----6 分

设 $h(x) = 1 - x - x \ln x, x \in (0, +\infty)$ 所以 $h'(x) = -\ln x - 2 = -(\ln x - \ln e^{-2})$ -----8 分

因此 $x \in (0, e^{-2})$ 时, $h'(x) > 0, h(x) \nearrow$, $x \in (e^{-2}, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0, h(x) \searrow$

所以 $h(x)_{\max} = h(e^{-2}) = 1 + e^{-2}$, 故 $(1 - x - x \ln x) \leq 1 + e^{-2}$.

设 $\varphi(x) = e^x - (x+1)$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 1 = e^x - e^0$, -----10 分

$\because x > 0, \therefore \varphi'(x) > 0, \varphi(x) \nearrow, \therefore \varphi(x) > \varphi(0) = 0$, 即 $\frac{e^x}{x+1} > 1$.

$\therefore (1 - x - x \ln x) < \frac{e^x}{x+1} (1 + e^{-2})$, 对任意的 $x > 0, g(x) < 1 + e^{-2}$. -----12 分

21. 【详解】(1) 由题意得 $\begin{cases} 2a + 2c = 6 \\ a - c = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = \sqrt{3}, \\ c = 1, \end{cases}$

椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, -----3 分

$F_1(-1, 0)$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = -4x$. -----4 分

(2) 由题意得直线 l 的斜率不为 0, $Q(-2, 0)$,

设直线 l 的方程为 $x = my - 2$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

由 $\begin{cases} x = my - 2 \\ y^2 = -4x \end{cases}$, 得 $y^2 + 4my - 8 = 0$, $\therefore y_1 + y_2 = -4m, y_1 y_2 = -8$, -----5 分

$\therefore S_2 = \frac{13}{3} S_1$,

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \sin \angle AOB}{\frac{1}{2}|OC| \cdot |OD| \sin \angle COD} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{|OC| \cdot |OD|} = \left| \frac{y_1}{y_3} \right| \left| \frac{y_2}{y_4} \right| = \left| \frac{y_1 y_2}{y_3 y_4} \right| = \frac{13}{3}, \text{-----6 分}$$

$$\because y_1^2 = -4x_1, \therefore \text{直线 } OA \text{ 的斜率为 } \frac{y_1}{x_1} = -\frac{4}{y_1}, \text{ 即直线 } OA \text{ 的方程为 } y = -\frac{4}{y_1}x,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{4}{y_1}x \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } y_3^2 = \frac{3 \times 64}{3y_1^2 + 64}, \text{ 同理可得 } y_4^2 = \frac{3 \times 64}{3y_2^2 + 64} \text{-----8 分}$$

$$\frac{y_3^2 \cdot y_4^2}{\frac{3^2 \times 64^2}{9 \times 64 + 3 \times 64 \times [(-4m)^2 + 16] + 64^2}} = \frac{3^2 \times 64^2}{48m^2 + 121}, \text{-----10 分}$$

$$\left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 = \frac{|y_1 y_2|^2}{|y_3 y_4|^2} = \frac{121 + 48m^2}{9} = \frac{13^2}{3^2}, \text{ 得 } m = \pm 1, \text{-----11 分}$$

$$\therefore \text{存在直线 } l, \text{ 方程为 } x - y + 2 = 0 \text{ 或 } x + y + 2 = 0. \text{-----12 分}$$

22. 【详解】(1) 因为 $2\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = m - 2\sqrt{3}$, 所以

$$2\rho \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} - 2\rho \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} = m - 2\sqrt{3},$$

$$\text{又因为 } \rho \sin \theta = y, \rho \cos \theta = x, \text{ 所以化简为 } y = \sqrt{3}(x - 2) + m,$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}t \\ y = m + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}) \text{-----3 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} x = 2 + 4\cos \varphi \\ y = 4\sin \varphi \end{cases} \text{ 消去 } \varphi \text{ 得: } (x - 2)^2 + y^2 = 16,$$

$$\text{所以曲线 } C \text{ 的普通方程 } (x - 2)^2 + y^2 = 16. \text{-----5 分}$$

$$(2) \text{ 由 } \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \mathbf{0} \text{ 知 } \overrightarrow{PA} \text{ 与 } \overrightarrow{PB} \text{ 反向, 所以点 } P(2, m) \text{ 在圆内, -----6 分}$$

$$\text{联立直线 } l \text{ 的参数方程和曲线 } C \text{ 的普通方程, 可得 } t^2 + \sqrt{3}mt + m^2 - 16 = 0,$$

$$\text{设 } A, B \text{ 对应的参数分别为 } t_1, t_2. \quad \text{故 } t_1 + t_2 = -\sqrt{3}m, \quad t_1 \cdot t_2 = m^2 - 16$$

由 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 \cdot t_2 < 0 \end{cases}$, 解得 $-8 < m < 8$. -----8 分

又因为 $t_1 \cdot t_2 < 0$, 由于 $t_1 = -2t_2$, 代入①②得 $7m^2 = 16$,

解得 $m = \pm \frac{4\sqrt{7}}{7}$ (符合 m 的取值范围) -----10 分

23. 【详解】(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) > 8 \Leftrightarrow |x-6| + |x-2| > 8$

当 $x \leq 6$ 时, 有 $2x-8 > 8$, 解得 $x > 8$, 此时得 $x > 8$;

当 $2 < x < 6$ 时, 有 $6-x+x-2 > 8$, 此时无解;

当 $x \leq 2$ 时, 有 $6-x+2-x > 8$, 解得 $x < 0$, 此时得 $x < 0$ -----4 分

综上, 不等式 $f(x) > 8$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$. -----5 分

(2) 对任意 $x \in R$, 恒有 $f(x) \geq 5-a$, 则 $f(x)_{\min} \geq 5-a$

因为 $f(x) = |x-a^2-2| + |x-a| \geq |a^2-a+2|$, 所以 $|a^2-a+2| \geq 5-a$ -----7 分

即 $a^2-a+2 \geq 5-a$, 解得 $a \geq \sqrt{3}$ 或 $a \leq -\sqrt{3}$ -----9 分

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ -----10 分