# 参考答案

## 普高联考2022—2023学年高三测评(五)

## 理科数学

1. B 【解析】$\because A=\{-3,-1,1,3,\cdots\}$，$\complement_U B=\{x|-1<x<4\}$，$\therefore A\cap\complement_U B=\{1,3\}$. 故选B.

2. C 【解析】$\frac{z\bar{z}+i}{z}=\frac{(1+2i)(1-2i)+i}{1+2i}=\frac{5+i}{1+2i}=\frac{(5+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{7-9i}{5}=\frac{7}{5}-\frac{9}{5}i$. 故选C.

3. D 【解析】抛物线的焦点为$(-4,0)$，所以$c=4$，由$c^2=m+4$得$m=12$，则$a=\sqrt{m}=2\sqrt{3}$，所以实轴长为$4\sqrt{3}$. 故选D. 来源：高三答案公众号

4. D 【解析】设所求函数的图象上点$P(x,y)$关于$x=2$对称的点为$Q(4-x,y)$，由题意知点$Q$在$y=\log_2 x$的图象上，所以$y=\log_2(4-x)$. 故选D.

5. B 【解析】$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2+m\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=6$，又因为$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}^2=-9$，所以$9-9m=6$，解得$m=\frac{1}{3}$. 故选B.

6. C 【解析】由题图可知，同比增长率均大于0，故A选项正确；2022年6月份至2022年12月份全国居民消费价格同比增长率的均值为$\frac{1}{7}\times(2.5\%+2.7\%+2.5\%+2.8\%+2.1\%+1.6\%+1.8\%)\approx 2.3\%$，B选项正确；设2022年6月份全国居民消费价格为$a$，则8月份的全国居民消费价格为$a(1+0.005)(1-0.001)=a(1+0.004-0.000\,005)>a$，故C选项错误；设2022年5月份全国居民消费价格为$m$，则2022年6月份全国居民消费价格为$m$，设2021年6月份全国居民消费价格为$x$，则$\frac{m-x}{x}\times100\%=2.5\%$，则$m=(1+2.5\%)x>x$，故D选项正确. 故选C.

7. C 【解析】由$\sin(\alpha+\beta)+\sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)=4\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos\beta$可得$2\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{3})=4\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos\beta$，即$\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{3})=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos\beta+\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin\beta=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos\beta$，化简可得

$\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin\beta=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos\beta$，

即$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)=0$，所以$\alpha-\beta=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，可得$\tan(\alpha-\beta)=-\sqrt{3}$. 故选C.

8. B 【解析】通过题中所给的三视图，可以得出该几何体是由一个大圆柱的四分之一和一个小圆柱的四分之一组合而成的，两个圆柱的底面半径都是2，大圆柱的高是6，小圆柱的高是2，

所以该几何体的体积为$V=\frac{1}{4}\times\pi\times2^2\times6+\frac{1}{4}\times\pi\times2^2\times2=8\pi\approx\frac{2\,840}{113}$. 故选B.

9. D 【解析】$f(x)=\cos^2x-\frac{1}{2}=\frac{\cos 2x+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos 2x$，

$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得$y=\frac{1}{2}\cos 2(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{3})$的图象，

再将所得图象上的所有点的横坐标变为原来的$\frac{2}{\omega}$倍，得$g(x)=\frac{1}{2}\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})$的图象.

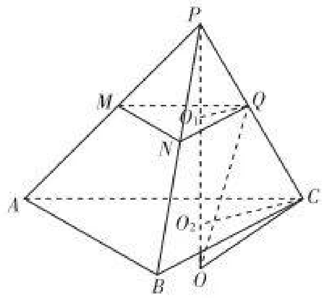
因为$x\in(0,2)$，所以$\omega x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},2\omega+\frac{\pi}{3})$，

若$g(x)$有两个极值点，则$2\omega+\frac{\pi}{3}\in(2\pi,3\pi]$，解得$\omega\in(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}]$，

若$g(x)$有两个零点，则$2\omega+\frac{\pi}{3}\in(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$，解得$\omega\in(\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}]$.

综上，$\omega$的取值范围为$(\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{12}]$，故选 D.

10. B 【解析】如图，设$PM=x(0<x<6)$，截面$MNQ$的外接圆圆心为$O_1$，




底面$ABC$的外接圆圆心为$O_2$，则$O_1Q=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$CO_2=2\sqrt{3}$，$PO_2=2\sqrt{6}$，

三棱台$MNQ-ABC$的外接球的表面积为$54\pi$，设外接球的半径为$R$，则

$4\pi R^2=54\pi$，所以$R=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，

设外接球的球心为$O$，在$\triangle OO_2C$中，$O_2C^2+O_2O^2=R^2$，解得$O_2O=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

由$\triangle PO_1Q\backsim\triangle PO_2C$，可得$O_2O_1=2\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}x$，$OO_1=\frac{5\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}x$，

在$\triangle OO_1Q$中，$OO_1^2+O_1Q^2=R^2$，即$(\frac{5\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}x)^2+\frac{1}{3}x^2=(\frac{3\sqrt{6}}{2})^2$，

解得$x=4$或$x=6$(舍去)，所以$PM=4$. 故选 B.

11. A 【解析】设$A(x_0,y_0)$，则$B(-x_0,-y_0)$，

由$AD\perp x$轴，$2|AE|=3|DE|$，可得$E(x_0,-\frac{1}{5}y_0)$，又因为$k_{AB}=\frac{y_0}{x_0}$，则$k_{BP}=k_{BE}=\frac{-\frac{1}{5}y_0+y_0}{2x_0}=\frac{2}{5}k_{AB}$，

设$P(x_1,y_1)$，则$k_{AP}k_{BP}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\frac{b^2(1-\frac{x_1^2}{a^2})-b^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})}{x_1^2-x_0^2}=\frac{-\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-x_0^2)}{x_1^2-x_0^2}=-\frac{b^2}{a^2}$，

因为$k_{AB}k_{AP}=-\frac{1}{2}$，所以$\frac{5}{2}k_{BP}k_{AP}=-\frac{1}{2}$，得$k_{BP}k_{AP}=-\frac{1}{5}$，

所以$-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{5}$，则$\frac{c^2}{a^2}=\frac{4}{5}$，所以离心率$e=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

12. A 【解析】由$a=-\frac{\ln 3}{6\ln 2a}$，得$a\ln 2a=\frac{1}{6}\ln(2\times\frac{1}{6})$，

由$b=\frac{\ln 2-\ln 7}{7\ln 2b}$，得$b\ln 2b=\frac{1}{7}\ln(2\times\frac{1}{7})$，

由$(2c)^c=2^{-\frac{1}{4}}$，得$c\ln 2c=\frac{1}{8}\ln(2\times\frac{1}{8})$.

设函数 $f(x)=x\ln 2x$，则 $f'(x)=\ln 2x+x\times\frac{2}{2x}=\ln 2x+1$，令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{2e}$，

当 $x\in(0,\frac{1}{2e})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(\frac{1}{2e},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(\frac{1}{6})<f(\frac{1}{7})<f(\frac{1}{8})$，

因为 $f(a)=f(\frac{1}{6})$，$f(b)=f(\frac{1}{7})$，$f(c)=f(\frac{1}{8})$，所以 $f(a)<f(b)<f(c)$，

又因为 $a>\frac{1}{6}$，$b>\frac{1}{7}$，$c>\frac{1}{8}$，所以 $a,b,c$ 均大于 $\frac{1}{2e}$，

所以 $a<b<c$. 故选 A.

13. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 或 $(x+5)^2+(y+5)^2=25$（写出一个即可）

【解析】设圆的标准方程为 $(x+a)^2+(y+a)^2=a^2(a>0)$，则 $(-2+a)^2+(-1+a)^2=a^2$，

解得 $a=1$ 或 $a=5$，所以圆的标准方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 或 $(x+5)^2+(y+5)^2=25$.

14. $-240$　【解析】$(\frac{1}{x}-2)(ax-1)^5=\frac{1}{x}(ax-1)^5-2(ax-1)^5$，二项式 $(ax-1)^5$ 的展开式的通项为

$T_{r+1}=C_5^r(ax)^{5-r}(-1)^r$，则常数项为 $\frac{1}{x}C_5^4(ax)^1(-1)^4-2C_5^5(-1)^5=5a+2=12$，解得 $a=2$. 此时

含 $x^3$ 的项为 $\frac{1}{x}C_5^1(2x)^4(-1)^1-2C_5^2(2x)^3(-1)^2=-240x^3$，所以 $x^3$ 的系数为 $-240$.

15. $\frac{\pi}{3}$（2 分）　$\frac{3}{4}$（3 分）　【解析】因为 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)=\frac{1}{2}ac\sin B$，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2ac\cos B=\frac{1}{2}ac\sin B$，则 $\tan B=\sqrt{3}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

$\sin A\sin C=\sin A\sin(\frac{2\pi}{3}-A)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A+\frac{1}{2}\sin^2 A=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2A=$

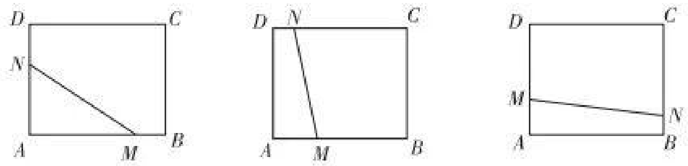
$\frac{1}{2}\sin(2A-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{4}$，

因为 $A\in(0,\frac{2\pi}{3})$，所以 $2A-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，所以 $\sin(2A-\frac{\pi}{6})\in(-\frac{1}{2},1]$，则 $\sin A\sin C\in(0,\frac{3}{4}]$，所以

$\sin A\sin C$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

16. $[10,13]$　【解析】由题意得长方形纸片的面积为 $12\times10=120(\text{cm}^2)$，不妨设折痕将纸片分成两部分的面积分别为 $S_1,S_2$，且 $S_1:S_2=1:3$，则 $S_1=30\ \text{cm}^2$，$S_2=90\ \text{cm}^2$.

当折痕 $MN$ 为图(1)所示的三角形一边时，




(1)　(2)　(3)

设 $AM=x$ cm, $AN=y$ cm, 则 $\begin{cases}\frac{1}{2}xy=30,\\0\leqslant x\leqslant 12,\\0\leqslant y\leqslant 10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}xy=60,\\6\leqslant x\leqslant 12,\end{cases}$

则 $MN^2=x^2+y^2=x^2+\frac{3\,600}{x^2}\geqslant 120$, 当且仅当 $x=2\sqrt{15}$ 时取等号, 即 $MN\geqslant 2\sqrt{30}$,

令 $t=x^2$, $t\in[36,144]$, 则 $f(t)=t+\frac{3\,600}{t}$, $f(t)$ 在 $[36,60]$ 上单调递减, 在 $[60,144]$ 上单调递增,

又 $f(36)=136$, $f(60)=120$, $f(144)=169$, 故 $f(t)\in[120,169]$, 故 $MN\in[2\sqrt{30},13]$.

当折痕 $MN$ 为图(2)所示的梯形一边时,

设 $AM=x$ cm, $DN=y$ cm, 则 $\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)\times 10=30,\\0<x\leqslant 12,\\0<y\leqslant 12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x+y=6,\\0<x<6,\end{cases}$

则 $MN^2=(x-y)^2+100=(2x-6)^2+100$, $0<x<6$,

根据二次函数的性质可知, $MN^2\in[100,136)$, 则 $MN\in[10,2\sqrt{34})$.

当折痕 $MN$ 为图(3)所示的梯形一边时,

设 $AM=x$ cm, $BN=y$ cm, 则 $\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)\times 12=30,\\0<x\leqslant 10,\\0<y\leqslant 10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x+y=5,\\0<x<5,\end{cases}$

则 $MN^2=(x-y)^2+144=(2x-5)^2+144$, $0<x<5$,

根据二次函数的性质可知, $MN^2\in[144,169)$, 则 $MN\in[12,13)$.

综上所述, 折痕长度的取值范围为 $[10,13]$.

17. (1) 因为数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $\frac{n}{6n+9}$,

所以 $\begin{cases}\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{15},\\\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{21},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a_1a_2=15,\\a_2a_3=35,\end{cases}$ ······························ 2 分

因为数列 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等差数列, 设其首项为 $a_1$, 公差为 $d$, 其中 $a_1>0$,

所以 $\begin{cases}(a_2-d)a_2=15,\\a_2(a_2+d)=35,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_2=5,\\d=2,\end{cases}$ ······························ 4 分

所以 $a_1=3$, 则 $a_n=2n+1$,

经检验, 满足条件, 所以 $a_n=2n+1$,

因为 $a_n=\log_2 b_n$, 所以 $b_n=2^{2n+1}$.

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^{2n+1}$. ·············· 6 分

(2)$c_n=\dfrac{2^{2n+1}}{(2^{2n+1}+1)(2^{2n+3}+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^{2n+1}+1}-\dfrac{1}{2^{2n+3}+1}\right)$, …………………………………………… 9分

设数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$,

则$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^3+1}-\dfrac{1}{2^5+1}+\dfrac{1}{2^5+1}-\dfrac{1}{2^7+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2n+1}+1}-\dfrac{1}{2^{2n+3}+1}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{2^{2n+3}+1}\right)=\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{3\times2^{2n+3}+3}$,

所以数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{3\times2^{2n+3}+3}$. …………………………………………… 12分

18. (1)如图,取$CH$的中点$P$,连接$MP$,$DP$,

因为$M$为$BH$的中点,所以$MP/\!/CB$,

又因为$AD/\!/CB$,所以$MP/\!/AD$,所以$M,P,A,D$四点共面. …………………………………… 2分

因为$GH/\!/CD$,$GD\perp CD$,$GH=2$,$GD=2\sqrt{3}$,$CD=4$,连接$DH$,

所以$DH=4=CD$,所以$DP\perp CH$, …………………………………………… 3分

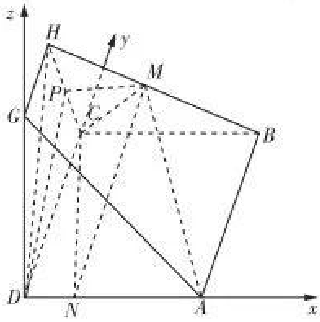
又因为$AD\perp CH$,$AD\cap DP=D$,所以$CH\perp$平面$ADPM$, …………………………………… 4分

又因为$MN\subset$平面$ADPM$,所以$CH\perp MN$. …………………………………………… 5分

(2)因为$AD\perp CD$,$AD\perp CH$,$CH\cap CD=C$,所以$AD\perp$平面$CDGH$,

所以$AD\perp GD$,所以$AD$,$GD$,$DC$两两垂直.

分别以$AD$,$DC$,$GD$所在直线为$x$轴,$y$轴,$z$轴建立空间直角坐标系$D-xyz$,如图所示, …………… 7分




则$C(0,4,0)$,$A(3,0,0)$,$N(1,0,0)$,$B(3,4,0)$,$H(0,2,2\sqrt{3})$,$M(\dfrac{3}{2},3,\sqrt{3})$, ………………………… 8分

设平面$AMN$的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,$\overrightarrow{AM}=(-\dfrac{3}{2},3,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AN}=(-2,0,0)$,

因为$\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+3y+\sqrt{3}z=0,\\ -2x=0,\end{cases}$取$\boldsymbol{n}_1=(0,1,-\sqrt{3})$. ………………………………… 9分

设平面$MNC$的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(a,b,c)$,$\overrightarrow{NM}=(\dfrac{1}{2},3,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{NC}=(-1,4,0)$,

因为$\begin{cases}\overrightarrow{NM}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{NC}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}\dfrac{1}{2}a+3b+\sqrt{3}c=0,\\ -a+4b=0,\end{cases}$取$\boldsymbol{n}_2=(-4\sqrt{3},-\sqrt{3},5)$. ………………………………… 10分

所以 $\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{-6\sqrt{3}}{2\times2\sqrt{19}}=-\dfrac{3\sqrt{57}}{38}$, ………………………………………… 11 分

设所求二面角为 $\theta$,则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle}=\dfrac{7\sqrt{19}}{38}$,

所以二面角 $C-MN-A$ 的正弦值为$\dfrac{7\sqrt{19}}{38}$. ………………………………………… 12 分

19. (1)随机抽取 1 人,该人到事业单位就业的概率估计为$\dfrac{300}{1\ 500}=\dfrac{1}{5}$.

记"5 人中恰好有 2 人去事业单位就业"为事件 $A$,

则 $P(A)=C_5^2(\dfrac{1}{5})^2(\dfrac{4}{5})^3=\dfrac{128}{625}$. ………………………………………… 4 分

(2)这 900 名毕业生第一个月的月薪均值为 来源:高三答案公众号

$\dfrac{1}{9}\times(3.5\times1+4.5\times2+5.5\times3+6.5\times2+7.5\times1)=5.5$, ………………………………………… 6 分

方差为$\dfrac{1}{9}\times[(3.5-5.5)^2+2\times(4.5-5.5)^2+3\times(5.5-5.5)^2+2\times(6.5-5.5)^2+(7.5-5.5)^2]=\dfrac{4}{3}$,

则 $\sigma=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\approx1.155$. ………………………………………… 8 分

设在企业就业的毕业生第一个月的月薪为 $X$(单位:千元),则 $X\sim N(5.5,\dfrac{4}{3})$,

$P(X>7.81)=P(X>\mu+2\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)}{2}=0.022\ 75$, ………………………… 10 分

该地 2022 年毕业生中到企业就业的毕业生人数有 $30\ 000\times\dfrac{450}{1\ 500}=9\ 000$, ………………………… 11 分

故到企业就业的毕业生第一个月的月薪大于 7 810 元人数为 $9\ 000\times0.022\ 75\approx205$. ……… 12 分

20. (1)根据题意可知直线 $l$ 的方程为 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{p}{2}$,

联立$\begin{cases}x^2=2py,\\ y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{p}{2},\end{cases}$ 得 $16y^2-34py+4p^2=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,所以 $y_1+y_2=\dfrac{17p}{8}$, ………………………………………… 2 分

因为 $|AB|=\dfrac{25}{8}$,所以 $|AB|=y_1+y_2+p=\dfrac{25}{8}p=\dfrac{25}{8}$,解得 $p=1$,

所以抛物线 $C$ 的方程为 $x^2=2y$. ………………………………………… 4 分

(2)抛物线的准线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}$,

当点 $M$ 在特殊位置$(0,-\dfrac{1}{2})$时,

切点 $P,Q$ 关于 $y$ 轴对称,要使 $MN\perp PQ$,点 $N$ 必须在 $y$ 轴上. ………………………………………… 5 分

故设 $M(m,-\frac{1}{2})$，$N(0,t)$，$P(x_1,\frac{x_1^2}{2})$，$Q(x_2,\frac{x_2^2}{2})$，

抛物线 $C$ 的方程为 $y=\frac{x^2}{2}$，求导得 $y'=x$，…………………………………………………… 6 分

所以切线 $MP$ 的斜率 $k_1=x_1$，

则直线 $MP$ 的方程为 $y-\frac{1}{2}x_1^2=x_1(x-x_1)$，整理得 $y=x_1x-\frac{x_1^2}{2}$，

又点 $M$ 在直线 $MP$ 上，所以 $mx_1-\frac{x_1^2}{2}=-\frac{1}{2}$，整理得 $x_1^2-2mx_1-1=0$，

同理可得 $x_2^2-2mx_2-1=0$，…………………………………………………………………… 8 分

故 $x_1$ 和 $x_2$ 是一元二次方程 $x^2-2mx-1=0$ 的根，

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=2m,\\ x_1x_2=-1.\end{cases}$ …………………………………………………………………… 9 分

因为 $\overrightarrow{MN}=(-m,t+\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,\frac{x_2^2-x_1^2}{2})$，

所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}=-m(x_2-x_1)+(t+\frac{1}{2})\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{2}=-m(x_2-x_1)+(t+\frac{1}{2})m(x_2-x_1)=$

$m(x_2-x_1)(t-\frac{1}{2})$，…………………………………………………………………………… 11 分

当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，

即存在定点 $N(0,\frac{1}{2})$，使得直线 $MN$ 与直线 $PQ$ 垂直．……………………………………… 12 分

21.（1）当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^x(\cos x+1)+x$，则 $f'(x)=e^x(\cos x+1)+e^x(-\sin x)+1$，

因为 $f'(\pi)=1$，$f(\pi)=\pi$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=\pi$ 处的切线方程为 $y-\pi=x-\pi$，即 $x-y=0$．……………………………… 3 分

（2）$g(x)=f(x)-e^x\cos x=e^x-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$．

若 $a\leqslant 0$，则 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，不可能有两个零点．………………………………………… 4 分

若 $a>0$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $x=\ln a$ 为 $g(x)$ 的极小值点．……………………………………………………………… 5 分

要使 $g(x)$ 有 2 个零点，则需 $g(\ln a)=a-a\ln a<0$，即 $a>e$．

因为 $g(x)$ 的 2 个零点为 $x_1,x_2$，$x_1<x_2$，所以 $x_1<\ln a<x_2$．…………………………………………… 6 分

要证 $x_1+x_2<2\ln a$，只需证 $x_2<2\ln a-x_1$，

因为 $\ln a<x_2$，$g(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以只需证 $g(x_2)<g(2\ln a-x_1)$，

$g(2\ln a-x_1)-g(x_2)=g(2\ln a-x_1)-g(x_1)=e^{2\ln a-x_1}-a(2\ln a-x_1)-e^{x_1}+ax_1=a^2e^{-x_1}-2a\ln a-$

$e^{x_1}+2ax_1$，………………………………………………………………………………………… 8 分

设 $F(x)=a^2e^{-x}-e^x+2ax-2a\ln a\ (x<\ln a)$，则 $F'(x)=-a^2e^{-x}-e^x+2a$，

设 $h(x)=-a^2e^{-x}-e^x+2a$，则 $h'(x)=a^2e^{-x}-e^x$，

则 $h'(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，又因为 $h'(\ln a)=a^2e^{-\ln a}-e^{\ln a}=a-a=0$，

所以当 $x<\ln a$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递增.

又因为 $h(\ln a)=-a^2e^{-\ln a}-e^{\ln a}+2a=-a-a+2a=0$，

所以当 $x<\ln a$ 时，$h(x)<0$，即 $F(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，

$F(\ln a)=a^2e^{-\ln a}-e^{\ln a}+2a\ln a-2a\ln a=0$，所以 $F(x)>0$，即 $g(2\ln a-x_1)>g(x_2)$，

所以 $x_2<2\ln a-x_1$，即 $x_1+x_2<2\ln a$. ······································· 12 分

22. (1) 由 $C_1:\rho=2\sin\theta$，得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，所以 $x^2+y^2=2y$，所以 $x^2+(y-1)^2=1$，

则曲线 $C_1$ 的一个参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$ ($\theta$ 为参数). ······························ 3 分

由 $\rho\sin(\theta-\frac{5\pi}{6})=-2$，得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta+\frac{1}{2}\rho\cos\theta=2$，则 $x+\sqrt{3}y-4=0$，

所以直线 $C_2$ 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-4=0$. ······································· 5 分

(2) 将 $l:\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\neq0)$ 代入 $C_1,C_2$，得 $\rho_A=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$\rho_B=\dfrac{-2}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})}=2$， ················ 7 分

所以 $|AB|=2-\sqrt{3}$，$C_1(0,1)$ 到直线 $l$ 的距离 $d=\frac{1}{2}$，

所以 $S_{\triangle C_1AB}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$. ··············································· 10 分

23. (1) $f(x)=|2x+a|-|2x-1|\leqslant|(2x+a)-(2x-1)|=|a+1|=4$，

因为 $a>0$，所以 $a=3$. ··················································· 2 分

$$f(x)=|2x+3|-|2x-1|=\begin{cases}4,x>\frac{1}{2},\\ 4x+2,-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ -4,x<-\frac{3}{2},\end{cases}$$

所以 $f(x)<3$ 的解集为 $(-\infty,\frac{1}{4})$. ··············································· 5 分

(2) 当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=|2x+a|+2x-1$，

由 $f(x)>x^2$，得 $|2x+a|>x^2-2x+1>0$，

则可转化为 $2x+a>x^2-2x+1$ 在 $x\in(-1,0)$ 上成立，或者 $2x+a<-(x^2-2x+1)$ 在 $x\in(-1,0)$ 上成立. ··························································· 8 分

即 $a>x^2-4x+1$ 或 $a<-x^2-1$，

得 $a\geqslant6$ 或 $a\leqslant-2$.

所以实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$. ································ 10 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。