2023届高三二轮复习联考(二)　全国卷

文科数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】集合 $B=\{x|1-x>0\}=\{x|x<1\}$，又有集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x<1\}$．故选 C．

2.D 【解析】$(1+i)(1-2i)=1-2i+i-2i^2=3-i$，所以对应的点为$(3,-1)$．故选 D．

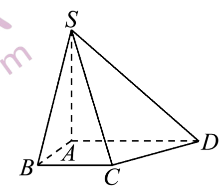
3.B 【解析】当 $a+1>b-2$ 时，取 $a=1,b=2$，则 $a<b$，所以"$a+1>b-2$"不是"$a>b$"的充分条件；当 $a>b$ 时，得 $a+1>b+1>b-2$，所以"$a+1>b-2$"是"$a>b$"的必要条件，所以"$a+1>b-2$"是"$a>b$"的必要不充分条件．故选 B．

4.B 【解析】由抛物线方程 $y=x^2$，化为标准方程 $x^2=y$，则 $2p=1$，$p=\frac{1}{2}$，抛物线开口向上，所以焦点坐标为$\left(0,\frac{1}{4}\right)$．故选 B．

5.C 【解析】$a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{a_2}{2a_2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\frac{1}{5}$，$a_4=\frac{a_3}{2a_3+1}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+1}=\frac{1}{7}$，$a_5=\frac{a_4}{2a_4+1}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{7}+1}=\frac{1}{9}$．故选 C．

6.B 【解析】由题意，甲工匠按 A,C,B 的顺序工作，乙工匠空闲时间最短，所需时间最短，最短时间为 $9+15+14+8=46$ h．故选 B．

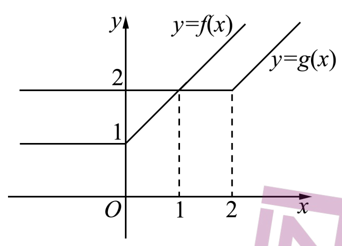
7.C 【解析】该四棱锥如图所示：



由图可知，$SA=AD=2$，$AB=BC=1$，$SA\perp$面 $ABCD$，$AD\perp$面 SAB，$AD/\!/BC$，底面是直角梯形，$V_{S-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(1+2)\times 1\times 2=1$．故选 C．

8.A 【解析】由题知 $f(x)=\frac{|x|+x}{2}+1=\begin{cases}1,x<0,\\x+1,x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=f(x-2)+1=\begin{cases}2,x<2,\\x,x\geqslant 2,\end{cases}$

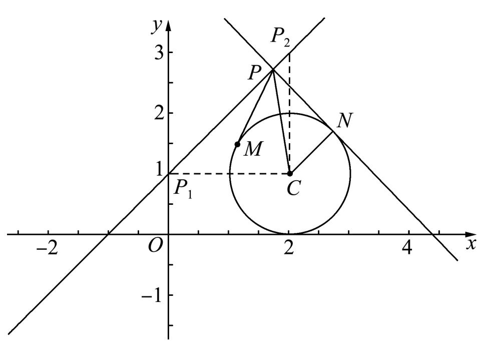
在同一坐标系下画出 $f(x)$，$g(x)$图象如下所示：



由图可知 $f(x)<g(x)$的解集为$(-\infty,1)$．故选 A．

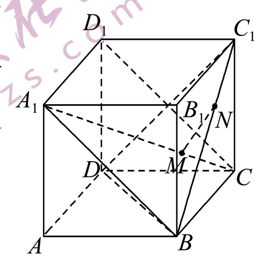
9.D 【解析】因为 $f(-x)=\cos(-2x)+|\sin(-x)|=\cos 2x+|\sin x|=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数，因为 $f(x)=\cos 2x+|\sin x|=1-2\sin^2 x+|\sin x|=-2t^2+t+1(t=|\sin x|\in[0,1])=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$，当 $t=\frac{1}{4}$时，$f(x)$取得最大值，最大值为$\frac{9}{8}$．故 D 正确．

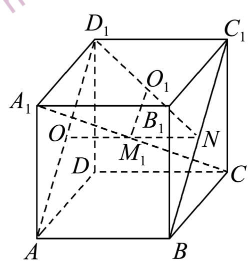
10.C 【解析】在圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 上存在两点 M,N，使得$\angle MPN=60°$，即要保证过点 P 的圆 C 的两条切线的夹角大于等于 $60°$，也即$\angle MPC\geqslant 30°$，因此点 P 与圆心 C 的距离要小于等于 2，而如图，已知当点 P 的横坐标为 0 或 2 时，$|PC|$恰好为 2，因此点 P 的横坐标的取值范围为$[0,2]$．故选 C．



11.A 【解析】在$[0,+\infty)$上有$f'(x)>\cos x$,∴$g'(x)=f'(x)-\cos x>0$,故$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,根据偶函数的对称性可知,$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,由$f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-f(t)>\cos t-\sin t$得$f(t)-\sin t<f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\cos t=f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$,即$g(t)<g\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$,∴$|t|<\left|\frac{\pi}{2}-t\right|$,即$t^2<\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2$,解得$t<\frac{\pi}{4}$.故选A.

12.D 【解析】因为$D_1N\cap$平面$BCD_1A_1=D_1$,且$BM\subset$平面BCD_1A_1,所以不存在$\lambda,\mu\in(0,1)$,使得$BM\parallel D_1N$,故①错误;记$A_1C\cap$平面$BDC_1=M$,在平面BDC_1中,过点M作直线$MN\parallel C_1D$,交直线BC_1于点N,在正方体中易得$C_1D\perp$平面BA_1C,所以此时$MN\perp$平面BA_1C,故②正确;当$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$时,M,N分别为A_1C,BC_1的中点,易得$MN\parallel D_1C_1$,且直线D_1C_1与A_1C不垂直,即MN不是线段A_1C和BC_1上两点连线的最小值,故③错误;当$\mu=\frac{1}{2}$时,N为BC_1的中点,$D_1N=\sqrt{2^2+2}=\sqrt{6}$,而$A_1C$的中点$M_1$到$D_1N$的中点$O_1$的距离等于$M_1O_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AD_1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{6}}{2}$,因此以$D_1N$为直径的球与线段$A_1C$必有交点,即存在$\lambda\in(0,1)$,使得$\angle D_1MN=90°$.故④正确.故选D.





13.$2x+y-1=0$ 【解析】由$f(x)=xe^x-3x+1$,得$f'(x)=(x+1)e^x-3$,∴$f'(0)=-2$,则曲线$f(x)=xe^x-3x+1$在点$(0,1)$处的切线方程是$y=-2x+1$.故答案为$2x+y-1=0$.

14.6 【解析】因为$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$,所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$,所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\times6^2-6\times6\times\frac{1}{2}=6$.故答案为6.

15.$\frac{\pi}{3}$ 【解析】由$\sqrt{3}a=2b\sin B\cos C+2b\sin C\cos B$得$\sqrt{3}a=2b\sin(B+C)$,由正弦定理可得,$\sqrt{3}\sin A=2\sin B\sin(B+C)$,$\sqrt{3}\sin A=2\sin B\sin A$,因为$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\sin A\neq0$,所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$B=\frac{\pi}{3}$.故答案为$\frac{\pi}{3}$.

16.$\frac{\sqrt{15}}{3}$ 【解析】如图所示,依题意可知$|OM|=a$,则$\tan\angle MON=\tan(\pi-\angle MOF)=-\tan\angle MOF=-\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{b}{a}$,所以在$Rt\triangle NMO$中,$|MN|=|OM|\cdot\tan\angle MON=b$,$|ON|=\sqrt{|OM|^2+|MN|^2}=\sqrt{a^2+b^2}=c$,所以$|NF|=2c$.在$\triangle MNF$中,因为$\sin\angle MNF=\sqrt{7}\sin\angle MFN$,由正弦定理得,$|MF|=\sqrt{7}|MN|$,所以$|MF|=\sqrt{7}b$,又因为$\cos\angle MNF=\cos\angle MNO=\frac{|MN|}{|ON|}=\frac{b}{c}$.在$\triangle MNF$中,由余弦定理得,$|MF|^2=|MN|^2+|NF|^2-2|MN|\cdot|NF|\cos\angle MNF$,即$7b^2=b^2+4c^2-2b\cdot2c\cdot\frac{b}{c}$,化简得$5b^2=2c^2$,所以$5(c^2-a^2)=2c^2$,所以$3c^2=5a^2$,设双曲线$C$的离心率为$e$,所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{3}$,所以$e=\frac{\sqrt{15}}{3}$.故答案为$\frac{\sqrt{15}}{3}$.

17.**解**:(1)当$n=1$时,$4S_1=a_1^2+2a_1-8=4a_1$,即$a_1^2-2a_1-8=0(a_1>0)$,

得$a_1=4$或$a_1=-2$(舍去). ………………………………………………………………………… 1分

当$n\geqslant2$时,由$4S_n=a_n^2+2a_n-8$,……①

得$4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}-8(n\geqslant2)$,……②

①−②得:$4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$, ……………………………………………………… 3分

化简得$(a_n-a_{n-1}-2)(a_n+a_{n-1})=0$. …………………………………………………… 4 分

因为$a_n>0$,所以$a_n-a_{n-1}-2=0$,$a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$,

即数列$\{a_n\}$是以 4 为首项,2 为公差的等差数列, …………………………………………………… 5 分

所以$a_n=2n+2$. …………………………………………………… 6 分

(2)存在. …………………………………………………… 7 分

当$a_{k_1}=a_1=4$,$a_{k_2}=a_3=8$时,

会得到数列$\{a_n\}$中原次序的一列等比数列$a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{km},\cdots,(k_1=1)$, …………………………………………………… 8 分

此时的公比$q=2$,是最小的,证明如下:

$a_{k_1}=a_1=4$,假若a_{k_2}取$a_2=6$,公比为$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$,

则$a_{k_3}=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=9$为奇数,不可能在数列$\{a_n\}$中. …………………………………………………… 10 分

所以$a_{km}=4\cdot 2^{m-1}=2^{m+1}$. …………………………………………………… 12 分

18.**解**:(1)当平面$PAE\perp$平面$AECD$时,过P作$PO\perp AE$于O,

因为平面$PAE\cap$平面$AECD=AE$,$PO\subset$平面PAE,$PO\perp AE$,

所以$PO\perp$平面$AECD$. …………………………………………………… 1 分

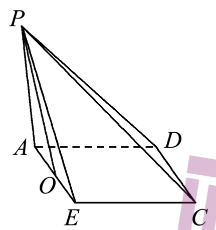
此时四棱锥$P-AECD$的高就是等边三角形$\triangle PAE$的高PO,

四棱锥$P-AECD$的体积最大, …………………………………………………… 3 分

因为$\triangle ABE$是等边三角形,所以$\angle B=\angle AEB=\angle C=\frac{\pi}{3}$,所以$AE\parallel CD$,又$AD=CD$,所以四边形$AECD$是菱形.

四棱锥$P-AECD$体积最大值为:

$V_{P-AECD}=\frac{1}{3}AB\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot S_{AECD}=\frac{1}{3}AB\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot AD\cdot CD\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{4}$. …………………………………………………… 5 分



(2)由(1)知当平面$PAE\perp$平面$AECD$时,四棱锥$P-AECD$的体积最大,连接DO,DE.

由条件易知$\triangle ADE$和$\triangle APE$都是等边三角形, …………………………………………………… 6 分

则$AE\perp PO$,$AE\perp DO$,$PO\cap DO=O$,PO,$DO\subset$面PDO,

得$AE\perp$面PDO,$AE\perp PD$.

又$CD\parallel AE$,$CD\subset$面PCD,$AE\not\subset$面PCD,

所以$AE\parallel$面PCD. …………………………………………………… 7 分

设平面AEP与平面PCD的交线为l,则$l\parallel AE$,

所以$l\perp PD$,$l\perp PO$. …………………………………………………… 8 分

平面AEP与平面PCD所成的角即为PD与PO所成角, …………………………………………………… 9 分

因为$PO\perp DO$,$PO=DO$,所以$\triangle PDO$为等腰直角三角形, …………………………………………………… 10 分

所以PD与PO所成的角为$\frac{\pi}{4}$, …………………………………………………… 11 分

即平面AEP与平面PCD夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………………………… 12 分

19.**解**:(1)补全统计表如下：

	A 路线		B 路线		合计
	好	一般	好	一般	
男	10	20	55	35	120
女	90	30	20	40	180
合计	100	50	75	75	300

将所给数据整理,得到如下列联表：

性别	路线		合计
	A	B	
男	30	90	120
女	120	60	180
合计	150	150	300

$K^2=\dfrac{300\times(30\times60-120\times90)^2}{120\times180\times150\times150}=50>10.828$, ………………………………………… 4 分

因此,在犯错误概率不超过 0.001 的前提下认为对 A,B 两条路线的选择与性别有关. ……………………………… 6 分

(2)由(1)知对 A 路线评价一般的男顾客为 20 人,女顾客为 30 人,若按分层抽样的方法抽取 5 人,则抽取男顾客 2 人,女顾客 3 人,记 2 名男顾客为 A_1,A_2,女顾客为 B_1,B_2,B_3.从中抽取两人的所有基本事件为:A_1A_2, A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_2B_1,A_2B_2, A_2B_3, B_1B_2,B_1B_3, B_2B_3,共 10 个基本事件,其中一男一女的基本事件为:A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_2B_1,A_2B_2, A_2B_3,共 6 个,所以被奖励的人恰为一男一女的概率为$\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$. ……………………………………………… 12 分

20.**解**:(1)$f(x)=\ln x+kx$ 的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1}{x}+k(x>0)$.

当 $k\geqslant0$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,此时函数无最值. …………………………… 2 分

当 $k<0$ 时,在 $x\in\left(0,-\dfrac{1}{k}\right)$上,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;

在 $x\in\left(-\dfrac{1}{k},+\infty\right)$上,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.

所以 $f(x)$在 $x=-\dfrac{1}{k}$处取得极大值,即最大值,$f(x)_{最大值}=f\left(-\dfrac{1}{k}\right)=\ln\left(-\dfrac{1}{k}\right)-1$. …………………………… 4 分

综上可知,$k\geqslant0$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上无最值.

$k<0$ 时,$f(x)$的最大值为 $\ln\left(-\dfrac{1}{k}\right)-1$,无最小值. …………………………………………………… 5 分

(2)$f(x)=\ln x+kx$ 有两个零点,可得$-k=\dfrac{\ln x}{x}$有两个实根.

令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,$h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $h'(x)>0$,得 $0<x<\mathrm{e}$;令 $h'(x)<0$,得 $x>\mathrm{e}$, ………………………………………………………… 7 分

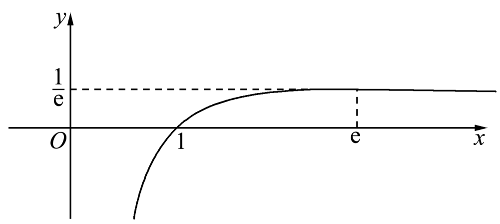
$\therefore h(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增,在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减.

$\therefore h(x)_{\max}=h(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ……………………………………………………………………………… 8 分

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$时,$x>0$,$\ln x>0$,所以 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}>0$,又 $h(1)=0$,

$\therefore x\in(0,1)$时,$h(x)<0$;$x\in(1,+\infty)$时,$h(x)>0$. ………………………………………………… 10 分

$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$大致图象如图所示，



若直线 $y=-k$ 与 $y=h(x)$的图象有两个交点，

则 $0<-k<\dfrac{1}{e}$，∴k 的取值范围是$\left(-\dfrac{1}{e},0\right)$. ………………………………………………………………………… 12 分

21.**解**:(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，则 $2c=2\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$.

因为$\triangle ABF_2$ 的周长 $l=|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=2a+2a=4a$， ………… 1 分

所以 $4a=8$，解得 $a=2$，所以 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$， ………………………………………………………… 2 分

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………………………… 3 分

(2)依题意可知直线 n 的斜率不为 0，其方程可设为 $x=my+1$.设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $P(4,y_1)$，$Q(4,y_2)$. ………………………………………………………………………………………………… 4 分

联立$\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得$(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+4}$. ………………………………………………………………… 5 分

因为 $S=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot(4-1)=\dfrac{3}{2}|y_1-y_2|=\dfrac{3}{2}\sqrt{(y_1-y_2)^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$ ……………………… 6 分

$=\dfrac{3}{2}\sqrt{\left(-\dfrac{2m}{m^2+4}\right)^2-4\left(-\dfrac{3}{m^2+4}\right)}=\dfrac{6\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}$. ……………………………………………………… 7 分

因为 $S_1=\dfrac{1}{2}|PM|\cdot|y_1|=\dfrac{1}{2}(4-x_1)\cdot|y_1|=\dfrac{1}{2}[4-(my_1+1)]\cdot|y_1|=\dfrac{1}{2}(3-my_1)\cdot|y_1|$，…………………… 8 分

同理 $S_2=\dfrac{1}{2}(3-my_2)\cdot|y_2|$. ……………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $S_1\cdot S_2=\dfrac{1}{4}(3-my_1)(3-my_2)\cdot|y_1y_2|=\dfrac{1}{4}[9-3m(y_1+y_2)+m^2y_1y_2]\cdot|y_1y_2|$

$=\dfrac{1}{4}\left[9-3m\left(-\dfrac{2m}{m^2+4}\right)+m^2\left(-\dfrac{3}{m^2+4}\right)\right]\cdot\dfrac{3}{m^2+4}=\dfrac{9(m^2+3)}{(m^2+4)^2}$，………………………………………… 10 分

所以 $\sqrt{S_1\cdot S_2}=\dfrac{3\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}$，故$\dfrac{\sqrt{S_1\cdot S_2}}{S}=\dfrac{\frac{3\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}}{\frac{6\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}}=\dfrac{1}{2}$，…………………………………………………… 11 分

即 $2\sqrt{S_1\cdot S_2}-S=0$.

故存在实数 $\lambda=2$，使得 $\lambda\sqrt{S_1\cdot S_2}-S=0$ 成立. ……………………………………………………………… 12 分

22.**解**:(1)由直线 l 的参数方程$\begin{cases}x=6-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\dfrac{1}{2}t,\end{cases}$

消参得直线 l 的普通方程为:$x+\sqrt{3}y-6=0$. ………………………………………………………………………… 2 分

由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=6\cos\theta$，

得 $\rho^2=6\rho\cos\theta$，因为 $\rho=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，所以 $x^2+y^2=6x$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-3)^2+y^2=9$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为曲线 C 的圆心 $(3,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|3-0-6|}{\sqrt{1+3}}=\dfrac{3}{2}$，

而⊙C 的半径 $r=3$，

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{9-\dfrac{9}{4}}=3\sqrt{3}$.

又点 P 到直线 l 距离的最大值为 $d_1=r+d=3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$，

所以△PAB 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}\times d_1\times|AB|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2}\times3\sqrt{3}=\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. ………………………………………………… 10 分

23.**解**：(1) $f(x)=|x+1|+|2x-4|=\begin{cases}-3x+3(x\leqslant-1),\\-x+5(-1<x<2),\\3x-3(x\geqslant2),\end{cases}$

由 $f(x)\geqslant6$ 解得 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant3$.

∴原不等式的解集为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 a,b,c 为正实数，且满足 $a+2b+4c=8$，

所以 $(a+2b+4c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=1+2+4+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{4c}{a}+\dfrac{2b}{c}+\dfrac{4c}{b}$

$=7+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{2b}{a}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{4c}{a}\right)+\left(\dfrac{2b}{c}+\dfrac{4c}{b}\right)$

$\geqslant7+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{2b}{a}}+2\sqrt{\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{4c}{a}}+2\sqrt{\dfrac{2b}{c}\cdot\dfrac{4c}{b}}=11+6\sqrt{2}$，

当且仅当 $a^2=2b^2=4c^2$，即 $a=\sqrt{2}b=2c$，$a=\dfrac{8}{3+\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{4\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$，$c=\dfrac{4}{3+\sqrt{2}}$ 时取等号，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 的最小值为 $\dfrac{11+6\sqrt{2}}{8}$. ………………………………………………………………… 10 分