湛江一中、深圳实验2023届高三两校三部1月联考

数学试题

注意事项：1.答题前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.并用2B铅笔将对应的信息点涂黑，不按要求填涂的.答卷无效.

2.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，只需将答题卡交回.

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分在每小题的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 已知集合$M=\{0,1,2,3\}$，集合$N=\left\{x\in\mathrm{N}^*\,\middle|\,|x+1|\le 3\right\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{1,2,3\}$

【答案】B

【解析】

【分析】解不等式求得集合N，由此求得$M\cap N$.

【详解】$|x+1|\le 3,-3\le x+1\le 3,-4\le x\le 2$，

所以$N=\{1,2\}$，所以$M\bigcap N=\{1,2\}$.

故选：B

2. 已知复数z满足$(1+2\mathrm{i})^2\cdot z=5$（其中i为虚数单位），则$z=$（　　）

A. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$　　B. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数的四则运算直接求得.

【详解】因为$(1+2\mathrm{i})^2\cdot z=5$，

所以$z=\frac{5}{(1+2\mathrm{i})^2}=\frac{5}{-3+4\mathrm{i}}=\frac{5(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$.

故选：D

3. 已知$\vec{a}=(-2,1),\vec{b}=(6,k),\vec{c}=(1,2)$，若$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\perp\vec{c}$，则$k=$（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】$\because\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\perp\vec{c}$，可得$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$，列方程计算可得答案.

【详解】$\vec{a}-2\vec{b}=(-14,1-2k)$，$\because\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\perp\vec{c}$，可得$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$

$\therefore -14+2(1-2k)=0$，解得$k=-3$

故选：A

4. “圆$C:x^2+y^2+2x-(2k+2)y+2k^2+2k=0$的圆心$C$在第二象限”是“$k>-1$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据圆的方程、充分、必要条件的知识确定正确答案.

【详解】“圆$C:x^2+y^2+2x-(2k+2)y+2k^2+2k=0$的圆心$C$在第二象限”，

则$\begin{cases}2^2+(2k+2)^2-4(2k^2+2k)>0\\ -\dfrac{-(2k+2)}{2}>0\end{cases}$，

解得$-1<k<\sqrt{2}$，

“$-1<k<\sqrt{2}$”是“$k>-1$”的充分不必要条件.

故选：A

5. 点声源在空间中传播时，衰减量ΔL（单位：dB）与传播距离（单位：m）的关系式为$\Delta L=10\times\lg\dfrac{\pi r^2}{4}$，取$\lg 2\approx 0.3$，则$r$从10米变化到80米时，衰减量的增加值约为（　　）

A. 24dB　　B. 18dB　　C. 16dB　　D. 12dB

【答案】B

【解析】

【分析】根据已知条件列式求得增加值.

【详解】衰减量的增加值为：

$$10\times\lg\left(\frac{\pi}{4}\times80^2\right)-10\times\lg\left(\frac{\pi}{4}\times10^2\right)$$

$$=10\times\lg\frac{\frac{\pi}{4}\times80^2}{\frac{\pi}{4}\times10^2}=10\times\lg2^6=60\times\lg2\approx60\times0.3=18\text{dB}.$$

故选：B

6. 已知等差数列$\{a_n\}$与各项均为整数的等比数列$\{b_n\}$的首项分别为$a_1=1,b_1=2$，且$a_2=b_2$，$a_6=b_4$.将数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$中所有项按照从小到大的顺序排列成一个新的数列$\{c_n\}$（重复的项只计一次），则数列$\{c_n\}$的前 40 项和为（　　）

A. 1843　　B. 2077　　C. 2380　　D. 2668

【答案】B

【解析】

【分析】根据等差数列和等比数列的性质，列方程组，求出a_n与b_n，然后根据$\{c_n\}$的定义，计算$\{c_n\}$的前 40 项和，可得答案.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，由$a_2=b_2$，$a_6=b_4$，

得到$\begin{cases}1+d=2q\\1+5d=2q^3\end{cases}$，解得$\begin{cases}d=3\\q=2\end{cases}$，$\therefore a_n=3n-2$，$b_n=2^n$，

根据题意，$\because a_2=b_2=4$，$a_6=b_4=16$，$a_{22}=b_6=64$，故$b_1=2$，$b_3=8$，$b_5=32$可与a_n一起排列，

故$c_{40}=a_{37}=109$

$\therefore\{c_n\}$：$1,2,4,7,8,10,13,16,19,22,\cdots,109$，

故数列$\{c_n\}$的前 40 项和为：

$$c_1+c_2+\cdots+c_{40}=\frac{(a_1+a_{37})\times37}{2}+b_1+b_3+b_5=\frac{(1+109)\times37}{2}+2+8+32=2035+42=2077.$$

故选：B

7. 双曲线C的左、右焦点分别为F_1,F_2，以C的实轴为直径的圆记为D，过F_1作D的切线分别交双曲线的左、右两支于M,N两点，且$|MN|=2|MF_1|$，则C的离心率为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据已知条件，利用余弦定理列方程，化简求得a,b的关系式，从而求得双曲线C的离心率.

【详解】圆D的圆心为原点，半径为a，

不妨设切线的倾斜角为α，则α为锐角，

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$，所以$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{b}{c}$，

设$|MF_1|=t$，则$|MN|=2t$，

根据双曲线的定义可知$|MF_2|=2a+t,|NF_1|=3t,|NF_2|=3t-2a$，

在三角形MF_1F_2中，由余弦定理得：

$(2a+t)^2=t^2+(2c)^2-2\cdot t\cdot 2c\cdot\frac{b}{c}$①；

在三角形NF_1F_2中，由余弦定理得：

$(3t-2a)^2=(3t)^2+(2c)^2-2\cdot 3t\cdot 2c\cdot\frac{b}{c}$②.

由①②整理得$a+b=3b-3a$，即$\frac{b}{a}=2$，

所以双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$.

故选：C

8. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2,x\le 0\\ \frac{x}{\ln x},x>0\text{且}x\ne 1\end{cases}$，若方程$\left[f(x)\right]^2-(2a+1)f(x)+a^2+a=0$有3个不同的实数根，则$a$的取值范围是（　　）

A. $[-1,0)\cup[1,\mathrm{e}-1)$　　B. $(-1,0)\cup(1,\mathrm{e}-1)$　　C. $[1,\mathrm{e}-1)$　　D. $(1,\mathrm{e}-1)$

【答案】A

【解析】

【分析】结合$f(x)$的图象、一元二次方程等知识确定正确答案.

【详解】当$x\le 0$时，$f(x)=x^3-3x+2,f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

所以$f(x)$在区间$(-\infty,-1),f'(x)>0,f(x)$递增；在区间$(-1,0),f'(x)<0,f(x)$递减.

$f(0)=2, f(-1)=4$，$f(-2)=-8+6+2=0$，

当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，

$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1),(1,\mathrm{e}), f'(x)<0, f(x)$ 递减；

在区间 $(\mathrm{e},+\infty), f'(x)>0, f(x)$ 递增.

当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，

$f(0)=2, f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，$\mathrm{e}-2\approx 0.72$，由此画出 $f(x)$ 的大致图象如下图所示，

方程 $\left[f(x)\right]^2-(2a+1)f(x)+a^2+a=0$①，

即 $\left[f(x)-a\right]\left[f(x)-(a+1)\right]=0$，所以 $f(x)=a$ 或 $f(x)=a+1$，

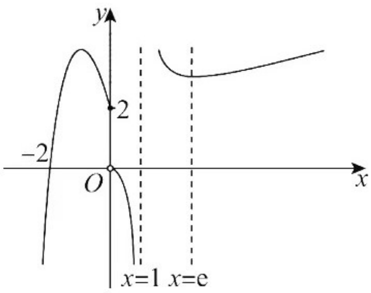
由于方程①有 3 个不同的实数根，$a+1-a=1$，

所以 $\begin{cases}a<0\\0\le a+1<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0\le a<2\\2\le a+1<\mathrm{e}\end{cases}$

所以 $-1\le a<0$ 或 $1\le a<\mathrm{e}-1$，

所以 a 的取值范围是 $[-1,0)\cup[1,\mathrm{e}-1)$.

故选：A



【点睛】求解类一元二次方程的根的个数问题，关键点有两个，一个是一元二次方程的解法，主要是十字相乘法以及公式法.另一个是函数的图象，由于本题中 $f(x)$ 不是基本初等函数，所以要利用导数对函数进行研究，从而画出函数的图象.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求全部选对 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分.

9. 下列说法中正确的是（　　）

A. 若$P(A)>0,P(B)>0$，则事件A,B相互独立与事件A,B互斥不能同时成立

B. 一组数据$4,3a,3-a,5$的平均数为4，则a的值为1

C. 五位同学站成一排拍照，其中甲不能站在最左边的位置，则不同的排队方法有120种

D. 若随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且$P(X>7)=P(X<-3)=0.1$，则$P(-3<X<2)=0.4$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据相互独立事件、互斥事件、平均数、排列、正态分布等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】A选项，若A,B相互独立，则A,B不互斥；若A,B互斥，则A,B不相互独立，所以A选项正确.

B选项，$\dfrac{4+3a+3-a+5}{4}=4$，解得$a=2$，B选项错误.

C选项，五位同学站成一排拍照，其中甲不能站在最左边的位置，

则不同的排队方法有$4\times A_4^4=96$种，C选项错误.

D选项，$\mu=\dfrac{-3+7}{2}=2$，所以$P(-3<X<2)=0.5-0.1=0.4$，D选项正确.

故选：AD

10. 已知向量$\vec{a}=(\sin\omega x,\sin\omega x-\cos\omega x)$，$\vec{b}=(2\sqrt{3}\cos\omega x,\sin\omega x+\cos\omega x)(\omega>0)$. 设函数$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}(x\in R)$，且函数$y=f(x)$图像的两相邻对称轴间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）

A. $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

B. $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$是函数$y=f(x)$图像的对称中心

C. 函数$y=f(x)$在区间$\left(-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right)$上单调递减

D. 使$f(x)>0$成立的x的取值区间为$\left[k\pi+\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{7\pi}{12}\right],k\in Z$

【答案】ACD

【解析】

【分析】化简得到$f(x)=2\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.对于A：利用周期公式求出$\omega=1$，得到$f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

对于B：直接求出函数$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像的对称中心，即可判断；对于C：直接求出

$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的单减区间，即可判断；对于D：直接解不等式$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>0$，即可判断.

【详解】因为向量$\vec{a}=(\sin\omega x,\sin\omega x-\cos\omega x)$，$\vec{b}=\left(2\sqrt{3}\cos\omega x,\sin\omega x+\cos\omega x\right)(\omega>0)$.函数

$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}\ (x\in \mathrm{R})$

所以$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\sin^2\omega x-\cos^2\omega x$

$=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x$

$=2\left(\sin 2\omega x\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\omega x\right)$

$=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$.

对于A：因为函数$y=f(x)$图像的两相邻对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$，所以$y=f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}\times 2=\pi$，

所以$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得：$\omega=1$，所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

故A正确；

对于B：令$2x-\frac{\pi}{6}=0+k\pi,(k\in \mathrm{Z})$，解得：$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},(k\in \mathrm{Z})$，所以函数$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的

图像的对称中心为$\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0\right),(k\in \mathrm{Z})$.所以$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$不是函数$y=f(x)$图像的对称中心.故B错误；

对于C：要求$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的单减区间，只需$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,(k\in \mathrm{Z})$，解得：

$\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi,(k\in \mathrm{Z})$.

当$k=-1$时，所以函数$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的一个单调区间为$\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right)$.故C正确；

对于D：$f(x)>0$即为$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>0$，解得：$0+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\pi+2k\pi,(k\in \mathrm{Z})$，所以

$\frac{\pi}{12}+k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{12}+k\pi,(k\in \mathrm{Z})$，

所以不等式$f\left(x\right)>0$的解集为$\left[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right],k\in Z$.故D正确.

故选：ACD

11. 如果一双曲线的实轴及虚轴分别为另一双曲线的虚轴及实轴，则此二双曲线互为共轭双曲线.已知双曲线C_1与C_2互为共轭双曲线，设C_1的离心率为e_1，C_2的离心率为e_2，则（　　）

A. 若$e_1=\sqrt{5}$，则$e_2=\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. e_1e_2的最小值为4

C. $e_1^2+e_2^2$的最小值为4

D. $\frac{1}{e_1}+\frac{2}{e_2}$的最大值为$\sqrt{5}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于A：利用离心率的定义直接计算；对于B：利用基本不等式求出e_1e_2的最小值为2，即可判断；对于C：利用基本不等式直接计算；对于D：先求出$\left(\frac{1}{e_1}\right)^2+\left(\frac{1}{e_2}\right)^2=1$.三角换元后利用三角函数求最值.

【详解】不妨设双曲线C_1的实轴长为$2m$，虚轴长为$2n$，焦距为$2c$，则$m^2+n^2=c^2$.

由共轭双曲线的定义可得：双曲线C_2的实轴长为$2n$，虚轴长为$2m$，焦距为$2c$.

所以$e_1=\frac{c}{m},e_2=\frac{c}{n}$.

对于A：$e_1=\sqrt{5}$，即$e_1=\frac{c}{m}=\sqrt{5}$.所以$c=\sqrt{5}m,n=\sqrt{c^2-m^2}=\sqrt{5m^2-m^2}=2m$，

所以$e_2=\frac{c}{n}=\frac{\sqrt{5}m}{2m}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.故A正确；

对于B：$e_1e_2=\frac{c}{m}\times\frac{c}{n}=\frac{c^2}{mn}=\frac{m^2+n^2}{mn}\geq\frac{2mn}{mn}=2$（当且仅当$m=n$时等号成立），

所以e_1e_2的最小值为2.故B错误；

对于C：$e_1^2+e_2^2=\left(\frac{c}{m}\right)^2\times\left(\frac{c}{n}\right)^2=\frac{m^2+n^2}{m^2}+\frac{m^2+n^2}{n^2}=1+\frac{n^2}{m^2}+\frac{m^2}{n^2}+1\geq 2+2\sqrt{\frac{n^2}{m^2}\times\frac{m^2}{n^2}}=4$（当且仅当$m=n$时等号成立）.

所以$e_1^2+e_2^2$的最小值为4.故C正确；

对于 D：因为$e_1=\frac{c}{m},e_2=\frac{c}{n}$，$m^2+n^2=c^2$，所以$\left(\frac{1}{e_1}\right)^2+\left(\frac{1}{e_2}\right)^2=\frac{m^2}{c^2}+\frac{n^2}{c^2}=1$.

不妨设$\frac{1}{e_1}=\sin\theta,\frac{1}{e_2}=\cos\theta,\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则$\frac{1}{e_1}+\frac{2}{e_2}=\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)\leq\sqrt{5}$（当且仅当$\begin{cases}\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$，即$\begin{cases}e_1=\sqrt{5}\\ e_2=\frac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$时等号成立）.故 D 正确.

故选：ACD

12. 在棱长为 1 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，若点 P 为棱C_1D_1上的一动点，则下列说法中正确的有（　　）

A. $AP+PC$的最小值为$\sqrt{5}$

B. 当 P 为棱C_1D_1的中点时，则四棱锥$P-ABB_1A_1$的外接球的表面积为$\frac{41}{16}\pi$

C. 平面A_1PC与平面CBB_1C_1所成夹角取最小值时，则线段$C_1P=\frac{1}{2}$

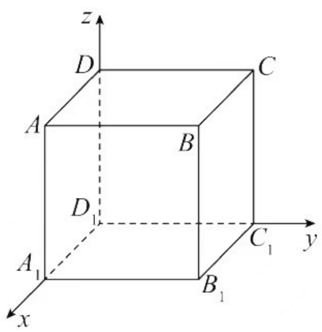
D. 若点E,F分别为棱AB,AD的中点，点Q为线段C_1D上的动点，则直线A_1Q与平面D_1EF交点的轨迹长度为$\frac{\sqrt{26}}{6}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，利用两点距离的坐标表示求解 AB，利用二面角的坐标表示求解 C，由图形关系和余弦定理求解 D.

【详解】建立如图所示坐标系，点 P 为棱C_1D_1上的一动点，设$P(0,a,0)(0\leq a\leq1)$，



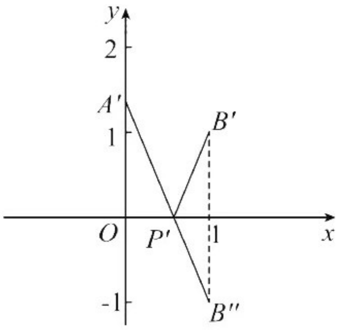
选项 A：因为$A(1,0,1)$，$C(0,1,1)$，

所以 $AP=\sqrt{(0-1)^2+(a-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{a^2+2}$，$PC=\sqrt{(1-a)^2+(1-0)^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$，

所以 $AP+PC=\sqrt{(a-0)^2+(0-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(a-1)^2+(0-1)^2}$，

即表示点 $P'(a,0)$ 到两定点 $A'(0,\sqrt{2})$，$B'(1,1)$ 的距离之和，

如图所示在坐标系中 B' 关于 x 轴的对称点为 $B''(1,-1)$，



因为 $P'A'+P'B'=P'A'+P'B''$，

所以当 P' 在 $A'B''$ 上时 $P'A'+P'B'$ 最小，最小值为 $\sqrt{(1-0)^2+(-1-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$，即 $AP+PC$ 的最小值为 $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$，A 错误；

选项 B：当 P 为棱 C_1D_1 的中点时，$P\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$，设球心为 O，正方形 ABB_1A_1 中心为 O'，

因为 $OO'\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以设 $O\left(b,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，

又因为 $A_1(1,0,0)$，由 $OA_1=OP$ 即 $\sqrt{(1-b)^2+\left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2}=\sqrt{(0-b)^2+\left(0-\dfrac{1}{2}\right)^2}$ 解得 $b=\dfrac{5}{8}$，

所以四棱锥 $P-ABB_1A_1$ 的外接球的半径 $R=OP=\sqrt{\left(0-\dfrac{5}{8}\right)^2+\left(0-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{41}}{8}$，

所以表面积为 $4\pi R^2=\dfrac{41\pi}{16}$，B 正确；

选项 C：由图可知平面 A_1PC 与平面 CBB_1C_1 所成夹角为锐角，

因为 $\overrightarrow{A_1P}=(-1,a,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,1)$，设平面 A_1PC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=-x+ay=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=-x+y+z=0\end{cases}$，当 $a\neq 0$ 时，解得 $\vec{n}=\left(1,\dfrac{1}{a},1-\dfrac{1}{a}\right)$，

设平面 CBB_1C_1 的法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$，

所以平面 A_1PC 与平面 CBB_1C_1 所成夹角的余弦值

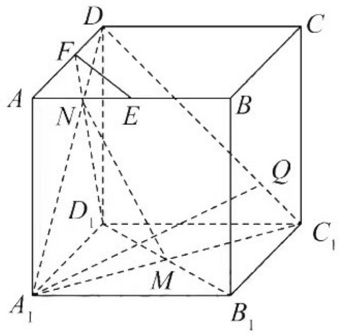
$$\cos\theta=\left|\cos<\vec{n},\vec{m}>\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right|}=\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}-\frac{2}{a}+2}}=\frac{1}{\sqrt{2a^2-2a+2}},$$

对于二次函数 $y=2a^2-2a+2$，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，y 最小，此时 $\cos\theta$ 最大，最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，

当 $a=0$ 时解得 $\vec{n}=(0,1,-1)$，此时 $\left|\cos<\vec{n},\vec{m}>\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以平面 A_1PC 与平面 CBB_1C_1 所成夹角取最小值时，$C_1P=\frac{1}{2}$，C 正确；

选项 D：连接 B_1D_1 如图，



因为 E,F 分别是棱 AB,AD 的中点，所以 $B_1D_1 // EF$，

则 B_1,D_1,E,F 四点共面，

连接 A_1C_1,A_1D，设 $A_1C_1\cap B_1D_1=M,A_1D\cap D_1F=N$，连接 MN，

则 MN 为直线 A_1Q 与平面 D_1EF 交点的轨迹，易得 $A_1D=\sqrt{A_1D_1^2+DD_1^2}=\sqrt{2}$，

$\triangle A_1ND_1\sim\triangle DNF$ 且 $\frac{A_1D_1}{FD}=2$，

所以 $A_1N=\frac{2}{3}A_1D=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

因为 $A_1C_1=C_1D=A_1D=\sqrt{2}$，所以 $\angle C_1A_1D=60°$，又 $A_1M=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以在 $\triangle A_1MN$ 中，由余弦定理可得 $MN^2=A_1N^2+A_1M^2-2A_1N\cdot A_1M\cos\angle MA_1N=\frac{13}{18}$，

所以$MN=\dfrac{\sqrt{26}}{3}$，即直线A_1Q与平面D_1EF交点的轨迹长度为$\dfrac{\sqrt{26}}{6}$，D正确；

故选：BCD

【点睛】选项D，根据正方体的结构及性质，根据两平面交线的性质，确定出交点的轨迹为线段MN是解决本题的关键，属于中档题.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(x+1)^8$的展开式中$x^2$项的系数为________________.（用数字作答）

【答案】-28

【解析】

【分析】由二项式展开式的通项公式求解即可

【详解】$(x+1)^8$的展开式通项为$T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}$，

所以$T_7=C_8^6x^2=28x^2$，$T_6=C_8^5x^3=56x^3$.

故所求x^2的系数为$1\times28-56=-28$.

故答案为：-28

14. 已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，准线为l，P是l上一点，PF交C于M,N两点，且满足$\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{FP}$，则$|NF|=$________________.

【答案】$\dfrac{4}{3}$

【解析】

【分析】依次求得M,N的坐标，根据抛物线的定义求得$|NF|$.

【详解】抛物线$C:y^2=4x$，则$\dfrac{p}{2}=1$，准线方程为$x=-1$，

由于$\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{FP}$，所以$F$是$MP$的中点，

设$P(-1,t)$，而$F(1,0)$，所以$M(3,-t)$，

将M点坐标代入抛物线方程得$t^2=12$，不妨设$t=2\sqrt{3}$，则$M(3,-2\sqrt{3})$.

设$N\left(\dfrac{y_0^2}{4},y_0\right)$，由于$M,N,F$三点共线，

所以$\dfrac{y_0-0}{\dfrac{y_0^2}{4}-1}=\dfrac{-2\sqrt{3}-0}{3-1}$，整理得$\sqrt{3}y_0^2+4y_0-4\sqrt{3}=0$，

解得$y_0=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，（$y_0=-2\sqrt{3}$舍去），所以$N\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，

所以$|NF|=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$.

故答案为：$\dfrac{4}{3}$

15. 已知点$P(x_0,y_0)$在曲线$y=\mathrm{e}^x$上，该曲线过P的切线交坐标轴于Q,R两点，若$x_0\le 0$，则$\triangle ORQ$面积的取值范围是____________.（O为坐标原点）

【答案】$(0,\dfrac{2}{\mathrm{e}}]$

【解析】

【分析】根据切线方程的公式，得到切线为：$y-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$，根据题意计算$Q(x_0-1,0)$，$R(0,\mathrm{e}^{x_0}-x_0\mathrm{e}^{x_0})$，列出$\triangle ORQ$面积为$S_{\triangle ORQ}=\dfrac{1}{2}\cdot(1-x_0)^2\cdot\mathrm{e}^{x_0}$，再令$g(x)=\dfrac{1}{2}(1-x)^2\cdot\mathrm{e}^x$，$(x\le 0)$，利用导数讨论$\triangle ORQ$面积的取值范围.

【详解】设$f(x)=y=\mathrm{e}^x$，则$f'(x)=\mathrm{e}^x$，得$f'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}$，$y_0=\mathrm{e}^{x_0}$，

切线方程为：$y-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$，设切线交$x$轴于$Q$，交$y$轴于$R$，故可得

$Q(x_0-1,0)$，$R(0,\mathrm{e}^{x_0}-x_0\mathrm{e}^{x_0})$，则$\triangle ORQ$面积为：$S_{\triangle ORQ}=\dfrac{1}{2}|x_0-1|\cdot\left|\mathrm{e}^{x_0}-x_0\mathrm{e}^{x_0}\right|$，

又$x_0\le 0$，$\therefore S_{\triangle ORQ}=\dfrac{1}{2}(1-x_0)\cdot(1-x_0)\cdot\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{2}\cdot(1-x_0)^2\cdot\mathrm{e}^{x_0}$，

令$g(x)=\dfrac{1}{2}(1-x)^2\cdot\mathrm{e}^x$，$(x\le 0)$，则$g'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^x\cdot(x^2-1)$，

所以，$x\in(-\infty,-1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

$x\in(-1,0]$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，故$g(x)_{\max}=g(-1)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，

$\therefore x\in(-\infty,0]$时，$g(x)>0$，

所以，$x_0\le 0$，则$\triangle ORQ$面积的取值范围是$(0,\dfrac{2}{\mathrm{e}}]$.

故答案为：$(0,\dfrac{2}{\mathrm{e}}]$

16. 数学家康托（$Cantor$）在线段上构造了一个不可数点集——康托三分集.将闭区间$[0,1]$均分为三段，

去掉中间的区间段$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，余下的区间段长度为$a_1$；再将余下的两个区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$分别均分为三段，并各自去掉中间的区间段，余下的区间段长度为a_2.以此类推，不断地将余下各个区间均分为三段，并各自去掉中间的区间段.重复这一过程，余下的区间集合即为康托三分集，记数列$\{a_n\}$表示第n次操作后余下的区间段长度.

（1）$a_4=$______________；

（2）若$\forall n\in \mathrm{N}^*$，都有$n^2a_n\le \lambda a_4$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围是______________.

【答案】 ①. $\frac{16}{81}$； ②. $\left[\frac{50}{3},+\infty\right)$.

【解析】

【分析】由题意直接求出a_1，a_2，a_3，a_4.归纳出数列$\{a_n\}$为等比数列，求出$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.利用分离常数法得到$\lambda\ge n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$.记$g(n)=n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$，$(n\in \mathrm{N}^*)$，判断出单调性，求出$g(5)=\frac{50}{3}$最大，即可求出$\lambda$的取值范围.

【详解】由题意可知：$a_1=\frac{2}{3}$，$a_2=a_1\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$，$a_3=a_2\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$，$a_4=a_3\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

所以$a_4=\frac{16}{81}$.

所以数列$\{a_n\}$为首项$a_1=\frac{2}{3}$，公比$q=\frac{2}{3}$的等比数列，所以$a_n=a_1\times q^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

因为$\forall n\in \mathrm{N}^*$，都有$n^2a_n\le \lambda a_4$恒成立，且$a_4=\frac{16}{81}$，所以$\lambda\ge n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{81}{16}=n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$恒成立，只需

$$\lambda\ge\left[n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}\right]_{\max}$$

记$g(n)=n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$，$(n\in \mathrm{N}^*)$，显然，$g(n)>0$.

所以$\frac{g(n+1)}{g(n)}=\frac{(n+1)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-4}}{n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}}=\frac{2(n+1)^2}{3n^2}$.

令$\dfrac{g(n+1)}{g(n)}\le 1$，即$\dfrac{2(n+1)^2}{3n^2}\le 1$，即$n^2-4n-2\ge 0$，解得：$n\ge 2+\sqrt{6}$.

因为$n\in \mathrm{N}^*$，所以$n\ge 2+\sqrt{6}$，可以取包含5以后的所有正整数，即$n\ge 5$以后

$g(n)=n^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-4}$，$(n\in \mathrm{N}^*)$递减.

而$g(1)=1^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1-4}=\dfrac{27}{8},g(2)=2^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2-4}=9,g(3)=3^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3-4}=\dfrac{81}{2}$,

$g(4)=4^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4-4}=16,g(5)=5^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-4}=\dfrac{50}{3}$,

所以$g(1)<g(2)<g(3)<g(4)<g(5)$.

综上所述：当$n=5$时，$g(5)=\dfrac{50}{3}$最大.

所以$\lambda\ge\dfrac{50}{3}$，所以实数λ的取值范围是$\left[\dfrac{50}{3},+\infty\right)$.

故答案为：$\dfrac{16}{81}$；$\left[\dfrac{50}{3},+\infty\right)$.

【点睛】求数列最值的方法：(1) 利用函数单调性求出最值；(2) 利用数列的性质求出最大项或最小项.

四、解答题；本题共6小题，第17题10分，第18—22题各12分，共70分解答应写出文字说明、证明过程成演算步题.

17. $\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\sqrt{3}(b\sin C+c\sin B)=4a\sin B\sin C$.

(1) 求角A；

(2) 若$a=\sqrt{7}$，且$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle ABC$的周长.

【答案】(1) $A=\dfrac{\pi}{3}$或$A=\dfrac{2\pi}{3}$；

(2) 当$A=\dfrac{\pi}{3}$时，周长为$\sqrt{7}+\sqrt{13}$；当$A=\dfrac{2\pi}{3}$时，周长为$\sqrt{7}+3$；

【解析】

【分析】(1) 利用正弦定理和三角变换求出角A；(2) 利用余弦定理求出$b+c$，即可求出周长.

【小问1详解】

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以$\sqrt{3}\left(b\sin C+c\sin B\right)=4a\sin B\sin C$可化为：

$\sqrt{3}\left(\sin B\sin C+\sin C\sin B\right)=4\sin A\sin B\sin C$.

因为$A,B,C\in\left(0,\pi\right)$，所以$\sin B\sin C\neq 0$，所以$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$A\in\left(0,\pi\right)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$或$A=\frac{2\pi}{3}$.

【小问2详解】

因为$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.即$\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$bc=2$.

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

当$A=\frac{\pi}{3}$时，有$7=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{2}$，所以$7=\left(b+c\right)^2-3bc$，解得：$b+c=\sqrt{13}>\sqrt{7}$符合题意，

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=\sqrt{7}+\sqrt{13}$.

当$A=\frac{2\pi}{3}$时，有$7=b^2+c^2-2bc\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，所以$7=\left(b+c\right)^2-bc$，解得：$b+c=3>\sqrt{7}$符合题意，

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=\sqrt{7}+3$.

18. 数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$a_n+S_n=2$.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）在a_n与a_{n+1}之间插入n个数，使得这$\left(n+2\right)$个数依次组成公差为d_n的等差数列，求数列$\left\{\frac{1}{d_n}\right\}$的前$n$项和.

【答案】（1）$a_n=2^{1-n}$

（2）$-n\cdot 2^{n+1}$

【解析】

【分析】（1）利用S_n与a_n的关系，得到$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$，利用等比数列通项公式，可求得$a_n$；

（2）根据等差数列的性质，得到$d_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=-\frac{1}{2^n\cdot(n+1)}$，进而求出$\frac{1}{d_n}=-2^n\cdot(n+1)$，

最后利用错位相消求和法进行计算，可得答案.

【小问 1 详解】

$n=1$ 时，$a_1=1$；

$n\geq 2$ 时，$a_n+S_n=2$，

$a_{n-1}+S_{n-1}=2$，作差得 $a_{n-1}=2a_n$，整理得，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，故 $\{a_n\}$ 为等比数列，

$a_n=2^{1-n}$

【小问 2 详解】

由（1）得，$a_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$，$a_{n+1}=(\frac{1}{2})^n$，

在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，使得这 $(n+2)$ 个数依次组成公差为 d_n 的等差数列，

得 $a_{n+1}-a_n=(n+1)d_n$，$\therefore d_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=-\dfrac{1}{2^n\cdot(n+1)}$，

$\dfrac{1}{d_n}=-2^n\cdot(n+1)$，设 T_n 为数列 $\left\{\dfrac{1}{d_n}\right\}$ 的前 n 项和，

$\therefore T_n=-\left[2\times 2+2^2\times 3+2^3\times 4+\cdots+2^n\times(n+1)\right]$，

$2T_n=-\left[2^2\times 2+2^3\times 3+2^4\times 4+\cdots+2^{n+1}\times(n+1)\right]$，

作差得，

$-T_n=-[4+(2^2+2^3+\cdots+2^n)-2^{n+1}\times(n+1)]$，

$T_n=4+\dfrac{4-2^{n-1}}{1-2}-2^{n+1}\cdot(n+1)=-n\cdot 2^{n-1}$

19. 如图 1，四边形 $ABCD$ 为边长为 4 的菱形，$\angle ABC=60°$，E 为 BC 的中点将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折至 $\triangle PAE$ 位置（如图 2），使二面角 $P-AE-D$ 为 $60°$.

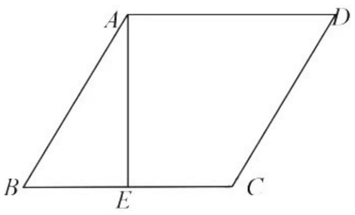


图1

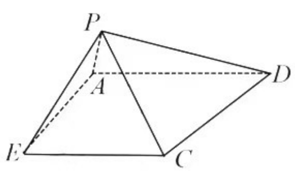


图2

（1）求四棱锥 $P-AECD$ 的体积；

（2）M 是线段 AE 上一点，记平面 PDM 与平面 PEC 所成的角为 α. 当 α 取得最小值时，求线段 AM 的长度.

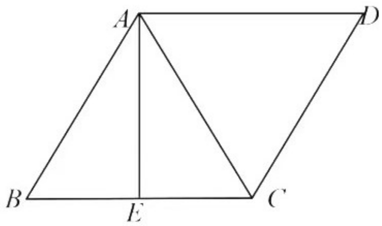
【答案】（1）6；

（2）$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 取 CE 的中点 F，连接 PF，证明出 PF 为四棱锥 $P-AECD$ 的高，即可求出四棱锥 $P-AECD$ 的体积；（2）过 E 作 $Ez//PF$，以 $\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{Ez}$ 分别为 x,y,z 轴正方向，建立空间坐标系，用向量法求解.

【小问 1 详解】



因为四边形 $ABCD$ 为边长为 4 的菱形，$\angle ABC=60°$，

所以 $AB=CB,\angle ABC=60°$，

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

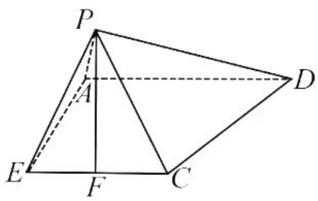
因为 E 为 BC 的中点，所以 $AE\perp BC$.

将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折至 $\triangle PAE$ 位置（如图 2），所以 $AE\perp PE, AE\perp CE$,

所以 $\angle PEC$ 即为二面角 $P-AE-D$ 的平面角，所以 $\angle PEC=60°$.

因为 E 为 BC 的中点，所以 $PE=CE$，所以 $\triangle$PEC 为等边三角形.

取 CE 的中点 F，连接 PF，则 $PF\perp CE$.



因为 $AE\perp PE, AE\perp CE, PE\subset$ 面 PCE，$CE\subset$ 面 PCE，所以 $AE\perp$ 面 PCE.

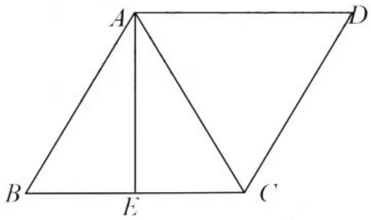
因为 $AE\subset$ 面 $AECD$，所以面 $AECD\perp$ 面 PCE.

因为 $PF\perp CE$，所以 $PF\perp$ 面 $AECD$.

即 PF 为四棱锥 $P-AECD$ 的高.

因为菱形 $ABCD$ 的边长为4，所以 $AD=AB=BC=4$.

在等边 $\triangle ABC$ 中，$AE=AB\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，$BE=CE=2$.



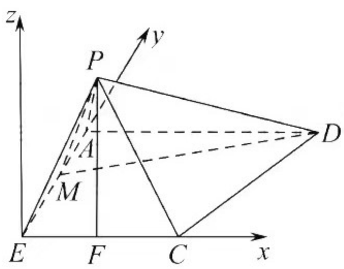
在等边 $\triangle$PEC 中，$PF=PE\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

在四棱锥 $P-AECD$ 中，底面积 $S_{AECD}=\frac{1}{2}(AD+EC)\cdot AE=\frac{1}{2}(4+2)\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$，高 $PF=\sqrt{3}$，

所以体积 $V=\frac{1}{3}\times 6\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$.

【小问 2 详解】

过 E 作 $Ez//PF$，则 $Ez\perp$ 面 $AECD$.



可以以 $\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{Ez}$ 分别为 x,y,z 轴正方向，建立空间坐标系，则

$E(0,0,0)$, $F(1,0,0)$, $C(2,0,0)$, $A(0,2\sqrt{3},0)$, $D(4,2\sqrt{3},0)$, $P(1,0,\sqrt{3})$, $M(0,m,0)$, $(0\le m\le 2\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{EA}=(0,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{PD}=(3,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{MD}=(4,2\sqrt{3}-m,0)$

因为面 $AECD\perp$ 面 PCE，面 $AECD\cap$ 面 $PCE=EC$，$AE\perp EC$，

所以 $AE\perp$ 面 PCE，所以 $\overrightarrow{EA}=(0,2\sqrt{3},0)$ 为面 PCE 的一个法向量.

不妨设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为面 PDM 的一个法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}=3x+2\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0\\ \overrightarrow{MD}\cdot\vec{n}=4x+(2\sqrt{3}-m)y+0=0\end{cases}$.

设 $y=1$，则 $\vec{n}=\left(\frac{m-2\sqrt{3}}{4},1,\frac{\sqrt{3}m+2}{4}\right)$.

由图知：平面 PDM 与平面 PEC 所成的角为 α 为锐角，所以

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{EA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{EA}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|0+2\sqrt{3}+0\right|}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{m-2\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2+\left(\frac{\sqrt{3}m+2}{4}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+8}}$$

因为余弦函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数，所以只需 α 取得最小值，只需 $\cos\alpha$ 最大，只需 m^2+8 最小.

因为 $0\le m\le 2\sqrt{3}$，所以 $m=0$ 时，m^2+8 最小.

此时，E,M 重合，所以 $AM=AE=2\sqrt{3}$.

20. 2020 年，一场突如其来的新型冠状病毒疫情席卷全球，时至今日，仍影响着人们的生产生活，为快速筛查出阳性患者，需按如下方案进行核酸检测：随机将 10 人分成一组，将 10 人样本混合后检测.若混合样本呈阴性，说明 10 人全部阴性；若混合样本呈阳性，说明其中至少一人呈阳性，则必须对这 10 人进行单人单检.

假设携带病毒（阳性）的人在人群中的占比为 $p\left(0<p<1\right)$，且每个人是否携带病毒相互独立.

（1）现有 10 份单人单检的样本，其中有 2 份为阳性.求恰好经过 3 次检测就排查出所有阳性样本的概率.

（2）请结合离散型随机变量及其分布列的有关知识，计算当 p 值在什么范围时，上述核酸检测方案优于单人单检方案.（参考数据：$\lg 0.794\approx -0.1$）

【答案】（1）$2p^2\left(1-p\right)$；

（2）$0<p<0.206$

【解析】

【分析】（1）分析试验过程，利用独立重复实验的概率公式即可求解；（2）计算出 10 人混采次数的数学期望，建立不等式，即可解得.

【小问 1 详解】

记事件 A：恰好经过 3 次检测就排查出所有阳性样本.所以需要第三次检测是阳性，前两次中有一次是阳性.

$P\left(A\right)=C_2^1p\left(1-p\right)\cdot p=2p^2\left(1-p\right)$.

即恰好经过 3 次检测就排查出所有阳性样本的概率为 $2p^2\left(1-p\right)$.

【小问 2 详解】

有 10 人参加核酸检测.

若采用单人单检方案，10 人需要采集 10 次；

若采用上述核酸检测方案，检测次数为Y，则Y的可能取值为 1，11.

其中$P(Y=1)=(1-p)^{10}$，$P(Y=10)=1-(1-p)^{10}$.

所以$EY=1\times(1-p)^{10}+11\times\left[1-(1-p)^{10}\right]$

要使上述核酸检测方案优于单人单检方案，只需$1\times(1-p)^{10}+11\times\left[1-(1-p)^{10}\right]<10$，

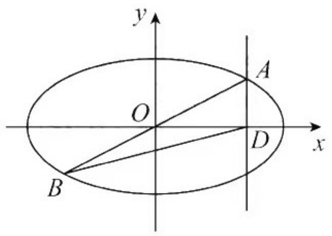
整理化简得：$(1-p)^{10}>\frac{1}{10}$，解得：$0<p<1-\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}}$.

因为$\lg 0.794\approx-0.1$，所以$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}}=(10)^{-0.1}=(10)^{\lg 0.794}\approx 0.794$，

所以$0<p<1-0.794=0.206$，所以$0<p<0.206$.

综上所述：当$0<p<0.206$时，上述核酸检测方案优于单人单检方案

21. 如图，A,B是椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2)$上关于原点对称的两点，其中点 A 在第一象限，过 A 作x轴的垂线，垂足为D.



（1）当D点与C的右焦点重合时，求$\triangle ABD$面积的最大值；

（2）已知点E在C上，从下面三个条件①②③中选择两个条件，证明另一个条件成立：

①B,D,E三点共线；②$AE\perp AB$；③$b=\sqrt{2}$.

【答案】（1）$\frac{8\sqrt{3}}{9}$

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据题意，求出$A(c,\frac{b^2}{2})$，得到$|AD|$，点B到直线AD的距离为$2c$，

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times|AD|\times 2c=2c-\frac{c^3}{2}$，令$g(x)=2x-\frac{x^3}{2}$，利用导数的性质，得到$\Delta ABD$面积的最大值.

（2）B,D,E三点共线，可得$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2-x_1}{2y_2}$，而$AE\perp AB$，可得$-\frac{x_1}{y_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，整理得到

$x_1{}^2+2y_1{}^2=x_2{}^2+2y_2{}^2$，对于椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$，整理得，$b^2x^2+4y^2=4b^2$，满足$b^2x_1{}^2+4y_1{}^2=4b^2$，

也满足$b^2x_2{}^2+4y_2{}^2=4b^2$，作差得$b^2(x_1{}^2-x_2{}^2)+4(y_1{}^2-y_2{}^2)=0$，最后得到$b^2=\frac{4(y_2{}^2-y_1{}^2)}{x_1{}^2-x_2{}^2}=2$，可由

①和②，计算得到③.

【小问1详解】

设椭圆的焦距为$2c$，$\because a=2$，$\therefore c=\sqrt{4-b^2}$，当$D$点与$C$的右焦点重合时，可得$D(c,0)$，$\therefore A$在第一象限，$\therefore A(c,\frac{b^2}{2})$，又由$A,B$是椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2)$上关于原点对称的两点，得到$B(-c,-\frac{b^2}{2})$，

$\therefore|AD|=\frac{b^2}{2}$，点$B$到直线$AD$的距离为$2c$，

故$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times\frac{b^2}{2}\times 2c=\frac{b^2c}{2}=\frac{(4-c^2)\cdot c}{2}=2c-\frac{c^3}{2}$，设$g(x)=2x-\frac{x^3}{2}$，$x>0$，

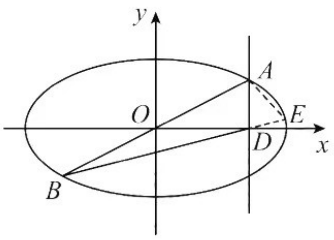
求导得$g'(x)=2-\frac{3x^2}{2}$，$x\in(0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

$x\in(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

故$g(x)_{\max}=g(\frac{2\sqrt{3}}{3})=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{9}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{9}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$，

故ΔABD面积的最大值为$\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

【小问2详解】



选①和②：① B,D,E 三点共线；② $AE\perp AB$；

设 $A(x_1,y_1)$，$B(-x_1,-y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则 $D(x_1,0)$，

直线 BD 为：$y=\frac{y_1}{2x_1}(x-x_1)$，$\because B,D,E$ 三点共线，E 在直线 BD 上，

可得 $2x_1y_2-y_1x_2+x_1y_1=0$， 而此时，

$\overrightarrow{AE}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$\overrightarrow{AB}=(-2x_1,-2y_1)$，$AE\perp AB$，

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=-2x_1(x_2-x_1)-2y_1(y_2-y_1)=2x_1^{\ 2}-2x_1x_2-2y_1y_2+2y_1^{\ 2}=0$，

整理得，$x_1^{\ 2}-x_1x_2-y_1y_2+y_1^{\ 2}=0$，

$\begin{cases}2x_1y_2-y_1x_2+x_1y_1=0\\x_1^{\ 2}-x_1x_2-y_1y_2+y_1^{\ 2}=0\end{cases}$，

整理得，$-\frac{x_1}{y_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 和 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2-x_1}{2y_2}$，

得到 $-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_2-x_1}{2y_2}$，化简得，$2y_2(y_1-y_2)=(x_2-x_1)^2$，

整理得，$2y_1y_2+2x_1x_2-2y_2^{\ 2}=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$，最后得到，

$x_1^{\ 2}+2y_1^{\ 2}=x_2^{\ 2}+2y_2^{\ 2}$，得到，$x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}=2(y_2^{\ 2}-y_1^{\ 2})$，

又$\because$ 椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$，整理得，$b^2x^2+4y^2=4b^2$，

满足 $b^2x_1^{\ 2}+4y_1^{\ 2}=4b^2$，也满足 $b^2x_2^{\ 2}+4y_2^{\ 2}=4b^2$，

作差得 $b^2(x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2})+4(y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2})=0$，

$b^2=\frac{4(y_2^{\ 2}-y_1^{\ 2})}{x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}}=2$，得 $b=\sqrt{2}$.

所以，可由①B,D,E三点共线和②$AE\perp AB$，得到③$b=\sqrt{2}$.

22. 对于函数$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$，若存在$x_1\neq x_2$满足$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，$f\left(x_2\right)=g\left(x_1\right)$，则称$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$为一组"矩形函数"

（1）判断$f_1\left(x\right)=\sin x$与$g_1\left(x\right)=\cos x$是否为一组"矩形函数"，并说明理由；

（2）若$f_2\left(x\right)=\ln ax\left(a>0\right)$与$g_2\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$为一组"矩形函数"，求$a$的取值范围.

【答案】（1）证明见解析；

（2）$(\mathrm{e},+\infty)$

【解析】

【分析】（1）令$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$，得到$\begin{cases}f_1(x_1)=g_1(x_2)\\f_1(x_2)=g_1(x_1)\end{cases}$，可判断$f_1\left(x\right)=\sin x$与$g_1\left(x\right)=\cos x$是一组"矩形函数"

（2）题设中的多元方程可转化为$\dfrac{a}{x}+\ln\ln x-\ln a=0$在$\left(1,+\infty\right)$上有两个不等的实数根，换元后即为$\dfrac{a}{\mathrm{e}^m}+\ln m-\ln a=0$在$\left(0,+\infty\right)$上有两个不等的实数根，利用导数和零点存在定理可求参数的取值范围.

【小问1详解】

由已知得，令$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$，$\because\sin\dfrac{\pi}{6}=\cos\dfrac{\pi}{3}$，$\sin\dfrac{\pi}{3}=\cos\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore$满足$\begin{cases}f_1(x_1)=g_1(x_2)\\f_1(x_2)=g_1(x_1)\end{cases}$，故$f_1\left(x\right)=\sin x$与$g_1\left(x\right)=\cos x$是一组"矩形函数"

【小问2详解】

$f_2\left(x\right)=\ln ax\left(a>0\right)$与$g_2\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$为一组"矩形函数"，必有

$\begin{cases}f_2(x_1)=g_2(x_2)\\f_2(x_2)=g_2(x_1)\end{cases}$，即$\begin{cases}\ln ax_1=\dfrac{1}{x_2}\\\ln ax_2=\dfrac{1}{x_1}\end{cases}$，故$\begin{cases}\ln ax_1=\dfrac{a}{ax_2}\\\ln ax_2=\dfrac{a}{ax_1}\end{cases}$，

令$s=ax_1,t=ax_2$，则$\begin{cases}\ln s=\dfrac{a}{t}\\\ln t=\dfrac{a}{s}\end{cases}$，

若$0<s\le 1$，则$a<0$，这与题设矛盾，故$s>1,t>1,s\ne t$，

故$s\ln\dfrac{a}{\ln s}=a,t\ln\dfrac{a}{\ln t}=a$，即$x\ln\dfrac{a}{\ln x}=a$在$(1,+\infty)$上有两个不等的实数根，

整理得到：$\dfrac{a}{x}+\ln\ln x-\ln a=0$在$(1,+\infty)$上有两个不等的实数根，

令$\ln x=m$，则$x=e^m$且$m>0$，

故$\dfrac{a}{e^m}+\ln m-\ln a=0$在$(0,+\infty)$上有两个不等的实数根，

设$g(m)=\dfrac{a}{e^m}+\ln m-\ln a,m>0$，则$g'(m)=\dfrac{e^m-am}{me^m}$，

因为$g(m)$在$(0,+\infty)$上有两个不等的实数根，故$g'(m)=0$在$(0,+\infty)$上有零点，

设$h(m)=g'(m)=e^m-am,m>0$，则$h'(m)=e^m-a$，

若$a\le 1$，则$h¢(m)>0$即$h(m)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故$h(m)>h(0)=1>0$，

这与$g'(m)=0$在$(0,+\infty)$上有零点矛盾，故舍；

若$a>1$，则当$0<m<\ln a$时，$h¢(m)<0$；

当$m>\ln a$时，$h¢(m)>0$，故$h(m)$在$(0,\ln a)$上递减，在$(\ln a,+\infty)$上递增，

故$h(m)_{\min}=h(\ln a)=a-a\ln a<0$，故$a>e$，

此时$h(0)=1>0$，$h(1)=e-a<0$

故$h(m)$在$(0,\ln a)$存在唯一的零点m_0，且$e^{m_0}=am_0$，且$0<m_0<1<\ln a$.

又当$0<m<m_0$时，$g'(m)>0$；当$m_0<m<\ln a$时，$g'(m)<0$，

故$g(m)$在$(0,m_0)$上递增，在$(m_0,\ln a)$上递减，

此时$g(m_0)=\dfrac{a}{e^{m_0}}+\ln m_0-\ln a$，而$m_0=\ln a+\ln m_0$，$e^{m_0}=am_0$，

故$g(m_0)=\dfrac{1}{m_0}+2\ln m_0-m_0$，其中$0<m_0<1<\ln a$.

设$v(x)=\dfrac{1}{x}+2\ln x-x,0<x<1$，则$v'(x)=\dfrac{-(x-1)^2}{x^2}<0$，

故$v(x)$在$(0,1)$为减函数，故$v(x)>v(1)=0$即$g(m_0)>0$，

而$g(\ln a)=1+\ln\ln a-\ln a=\ln\ln a-(\ln a-1)<0$（由$\ln x<x-1,0<x<1$可得），

当$0<m<e^{\ln a-a}$时，$g(m)<a+\ln m-\ln a<0$，

由零点存在定理可得此时$g(m)$在$(0,+\infty)$至少有两个零点，

综上，$a>e$.

【点睛】思路点睛：导数背景下的多变量的方程问题，应该根据方程的特征合理消元，从而把多元问题转化为一元方程的解的问题，后者可通过导数与零点存在定理来处理，注意再处理的过程中需要多次构建新函数帮助讨论导数零点的存在性及其范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。