盐城市 2023 届高三年级第三次模拟考试

数学试题

（总分 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1．本试卷考试时间为 120 分钟，试卷满分 150 分，考试时形式闭卷.

2．本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置，否则不给分.

3．答题前，务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第Ⅰ卷（选择题　共 60 分）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合 $B=\{x\mid y=\log_2(1-x)\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{-2,-1,0\}$　　D．$\{-2,-1,0,1\}$

【答案】C

【解析】$B=\{x\mid x<1\}$，$A\cap B=\{-2,-1,0\}$，选 C.

2．已知 $ABCD$ 是平面四边形，设 p：$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，$q$：$ABCD$ 是梯形，则 p 是 q 的_________条件

A．充分不必要　　B．必要不充分　　C．充要　　D．既不充分也不必要

【答案】A

【解析】$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，则 $ABCD$ 为梯形，充分；$ABCD$ 为梯形，则 AB 与 DC 可能平行，也可能是两腰，不必要，选 A.

3．$\left(2x^3-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式中 x^{10} 项的系数为

A．-240　　B．-20　　C．20　　D．240

【答案】D

【解析】$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(2x^3)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=\mathrm{C}_6^r2^{6-r}(-1)^rx^{18-4r}$，

$r=2$，$\mathrm{C}_6^22^4(-1)^2x^{10}=240x^{10}$，选 D.

4．已知 $a,b\in\mathbf{R}$，虚数 $z=1+bi$ 是方程 $x^2+ax+3=0$ 的根，则 $|z|=$

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】$(1+bi)^2+a(1+bi)+3=1+2bi-b^2+a+abi+3=a-b^2+4=(ab+2b)i=0$，

$\therefore\begin{cases}a^2-b^2+4=0\\ab+2b=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=-2\\b^2=2\end{cases}$，$|z|=\sqrt{3}$，选 B.

5．设 S_n 为下图所示的数阵中前 n 行所有数之和，则满足 $S_n\le 1000$ 的 n 的最大值为

$$\begin{array}{llllll}
第1行 & 1 & & & & \\
第2行 & 1 & 2 & & & \\
第3行 & 1 & 2 & 2^2 & & \\
 & & \cdots & & & \\
第n行 & 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1}
\end{array}$$

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

【答案】C

【解析】$a_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2(2^n-1)-n=2^{n+1}-2-n$，

$S_8=2^9-10=502<1000$，$S_9=2^{10}-11=1013>1000$，$\therefore n_{\max}=8$.

6．一般地，设 A、B 分别为函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域，如果由函数 $y=f(x)$ 可解得唯一的 $x=\varphi(y)$ 也是一个函数（即对任意一个 $y\in B$，都有唯一的 $x\in A$ 与之对应），那么就称 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是 y 的函数，习惯上改写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式. 例如函数 $f(x)=2x-1$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$.

设 $g(x)=\frac{4x}{x-1}(x>1)$，则函数 $h(x)=x+g^{-1}(x)$ 的值域为

A．$[8,+\infty)$　　B．$(8,+\infty)$　　C．$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D．$[9,+\infty)$

【答案】D

【解析】$y=\frac{4x}{x-1}$，则$x=\frac{y}{y-4}$，$\therefore g^{-1}(x)=\frac{x}{x-4},x>4$，

$$h(x)=x+\frac{x}{x-4}=x-4+\frac{x-4+4}{x-4}+4=x-4+\frac{4}{x-4}+5\geq 9$$，选 D.

7．动点M在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$从点B_1开始沿表面运动，且与平面A_1DC_1的距离保持不变，则动直线A_1M与平面A_1DC_1所成角正弦值的取值范围是

A．$\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$　　B．$\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　C．$\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D．$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

【答案】A

【解析】M到平面A_1DC_1的距离始终不变，则B_1M // 平面A_1DC_1，M点轨迹为$\triangle B_1AC$，$BD_1\perp$面A_1DC_1，令正方体棱长为1，则$\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$，$A_1(1,0,1)$，设$A_1M$与面$A_1DC_1$所成角为$\alpha$.

①M在B_1C上时，$\overrightarrow{B_1M}=\lambda\overrightarrow{B_1C}$，则$M(1-\lambda,1,1-\lambda)$，$\overrightarrow{A_1M}=(-\lambda,1,-\lambda)$，

$$\sin\alpha=\left|\cos\langle\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{BD_1}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1M}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\lambda^2+1}}\in\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right].$$

②M在AC上时，令$M(t,1-t,0)$，$\overrightarrow{A_1M}=(t-1,1-t,-1)$，

$$\sin\alpha=\left|\cos\langle\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{BD_1}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1M}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2(t-1)^2}\cdot\sqrt{3}}\in\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right].$$

③M在B_1A上时，$M(1,\mu,\mu)$，$\overrightarrow{A_1M}=(0,\mu,\mu-1)$，

$$\sin\alpha=\left|\cos\langle\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{BD_1}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1M}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2\mu^2-2\mu+1}\sqrt{3}}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right],$$

综上$\sin\alpha\in\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$，选 A.

8．定义曲线$\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{b^2}{y^2}=1$为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的“伴随曲线”.在双曲线$C_1:x^2-y^2=1$的伴随曲线$C_2$上任取一点$P$，过$P$分别作$x$轴、$y$轴的垂线，垂足分别为$M$、$N$，则直线$MN$与曲线$C_1$的公共点的个数为

A．0　　　B．1　　　C．2　　　D．与点P的位置有关系

【答案】B

【解析】曲线$C_1:x^2-y^2=1$的“伴随曲线”$C_2:\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=1$，$P(x_0,y_0)$，

则$M(x_0,0)$，$N(0,y_0)$，其中$\dfrac{1}{x_0^2}-\dfrac{1}{y_0^2}=1$，直线$MN:\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}=1$.

$\begin{cases}\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}=1\\ x^2-y^2=1\end{cases}$，消$y$可得$\left(1-\dfrac{y_0^2}{x_0^2}\right)x^2+2\cdot\dfrac{y_0^2}{x_0}x-y_0^2-1=0$，

$\therefore(x_0^2-y_0^2)x^2+2x_0y_0^2x-x_0^2y_0^2-x_0^2=0$，$-x_0^2y_0^2x^2+2x_0y_0^2x+x_0^2-y_0^2-x_0^2=0$

$-x_0^2y_0^2x^2+2x_0y_0^2x-y_0^2=0$，$x_0^2x^2-2x_0x+1=0$，$(x_0x-1)^2=0$，

$\therefore x=\dfrac{1}{x_0}$，$y=-\dfrac{1}{y_0}$，$\therefore MN$与抛物线有且仅有一个公共点，选B.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．随机抽取6位影迷对电影《长津湖》的评分，得到一组样本数据如下：92,93,95,95,97,98，则下列关于该样本的说法中正确的有

A．均值为95　　　B．极差为6

C．方差为26　　　D．第80百分位数为97

【答案】ABD

【解析】$\dfrac{1}{6}(92+93+95+95+97+98)=95$，A对.

$98-92=6$，B对.$6\times0.8=4.8$，第5个数97，第80百分位数是97，D对，选ABD.

10．已知数列 $\{a_n\}$ 对任意的整数 $n \geq 3$，都有 $n^2 a_{n-2} a_{n+2} = (n^2 - 4)a_n^2$，则下列说法中正确的有

A．若 $a_2 = 2$，$a_4 = 2$，则 $a_6 = 2$　　B．若 $a_1 = 1$，$a_3 = 3$，则 $a_{2n+1} = 2n+1(n \in \mathbf{N})$

C．数列 $\{a_n\}$ 可以是等差数列　　D．数列 $\{a_n\}$ 可以是等比数列

【答案】BC

【解析】$n = 4$ 时，$16a_2a_6 = 12a_4^2$，$\therefore a_6 = \dfrac{3}{2}$，A 错.

$n = 3$，$9a_1a_5 = 5a_3^2$，$\therefore a_5 = 5$，$a_{n+2} = \dfrac{(n^2-4)a_n^2}{n^2 \cdot a_{n-2}}$，$a_{2n+1} = \dfrac{(4n^2-4n-3)a_{2n-1}^2}{(2n-1)^2 a_{2n-3}}$

设 $k \leq 2n-1$ 都有 $a_{2n-1} = 2n-1$，$a_{2n+1} = \dfrac{(2n-3)(2n+1)(2n-1)^2}{(2n-1)^2(2n-3)} = 2n+1$，

$\therefore a_{2n+1} = 2n+1$，B 对则 C 对，D 错，选 BC.

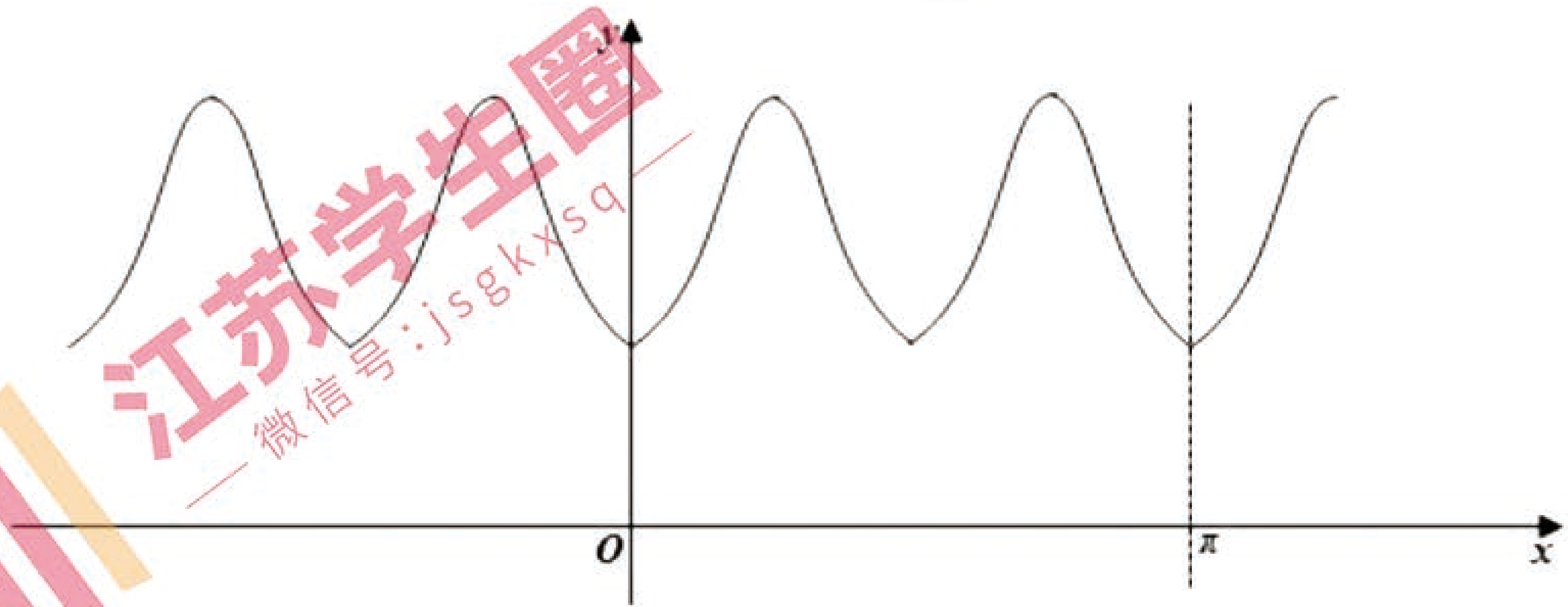
11．已知函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x| + \sin^4 2x$，则

A．$f(x)$ 是偶函数　　B．$f(x)$ 的最小正周期为 π

C．$f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ 上为增函数　　D．$f(x)$ 的最大值为 $1+\sqrt{2}$

【答案】AD

【解析】



$f(-x) = |\sin(-x)| + |\cos(-x)| + \sin^4(-2x) = f(x)$，$f(x)$ 为偶函数，A 对.

$f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = f(x)$，$T = \dfrac{\pi}{2}$，B 错.

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{16}$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{9}{16}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$没有单调性，C 错，选 AD.

12．设函数$f(x)$为$\mathbf{R}$上的奇函数，$f'(x)$为$f(x)$的导函数，$f(2x+1)-f(2-2x)=4x-1$，$f(1)=1$，则下列说法中一定正确的有

A．$f(2)=2$　　B．$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$　　C．$f'\left(\frac{123}{2}\right)=1$　D．$\sum_{i=1}^{59}f'\left(\frac{i}{20}\right)=59$

【答案】ACD

【解析】方法一：$f(2x+1)-f(2-2x)=1+2x-(2-2x)$，

$\therefore f(2x+1)-(1+2x)=f(2-2x)-(2-2x)$，令$g(x)=f(x)-x$，则$g(x)$为奇函数，

$g(1)=0$，$g(1+2x)=g(2-2x)$，即$g(x)$关于$x=\frac{3}{2}$对称，则$g(x)=\sin\pi x$满足所有条件.

$g(x)=f(x)-x=\sin\pi x$，$\therefore f(x)=x+\sin\pi x$，$f(2)=2$，A 对.

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$，B 错.

$f'(x)=1+\pi\cos\pi x$，$T=2$，$f'\left(\frac{123}{2}\right)=1+0=1$，C 对.

$f'(x)+f'(3-x)=1+\pi\cos\pi x+1+\pi\cos\pi(3-x)=2$，

$f'\left(\frac{1}{20}\right)+f'\left(\frac{59}{20}\right)=2$，$2\sum_{i=1}^{59}f'\left(\frac{i}{20}\right)=118$，即$\sum_{i=1}^{59}f'\left(\frac{i}{50}\right)=59$，D 对，选 ACD.

方法二：由题意知$f(x+1)-f(2-x)=2x-1$，$\because f(1)=1$，令$x=1$，$\therefore f(2)=2$，A 正确.

B 得不到，B 错.

且$f(x+3)-f(-x)=2x+3\Rightarrow f(x+3)+f(x)=2x+3$，$f'(x+3)+f'(x)=2$，

$f'(x)$的一个周期为6，$\therefore f'\left(\frac{123}{2}\right)=f'\left(\frac{3}{2}\right)$，由$f'(x+3)+f'(-x)=2$

$\Rightarrow 2f'\left(\frac{3}{2}\right)=2\Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right)=1$，C 正确.

由 $f'(x)$ 关于 $\left(\frac{3}{2},1\right)$ 中心对称，$\sum_{i=1}^{59} f'\left(\frac{i}{20}\right)=\left[f'\left(\frac{1}{20}\right)+f'\left(\frac{59}{20}\right)\right]+\left[f'\left(\frac{2}{20}\right)+f'\left(\frac{58}{20}\right)\right]$

$+\cdots+\left[f'\left(\frac{29}{20}\right)+f'\left(\frac{31}{20}\right)\right]+f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{58}{2}\times 2+1=59$，D 正确.

选：ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知圆 $C_1:(x+3)^2+y^2=2$ 和抛物线 $C_2:y^2=4x$，请写出与 C_1 和 C_2 都有且只有一个公共点的一条直线 l 的方程__________.（写出一条即可）

【答案】$x=y-1$ 或 $x=-y-1$ 或 $x=\sqrt{7}y-7$ 或 $x=-\sqrt{7}y-7$

【解析】$x=my+n$，即 $x-my-n=0$，$\frac{|-3-n|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$，①

$\begin{cases}x=my+n\\ y^2=4x\end{cases}$，消 x 可得 $y^2-4my-4n=0$，$\Delta=0$，$16m^2+16n=0$，②

由①②知 $\begin{cases}m=1\\ n=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-1\\ n=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=\sqrt{7}\\ n=-7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-\sqrt{7}\\ n=-7\end{cases}$

直线：$x=y-1$ 或 $x=-y-1$ 或 $x=\sqrt{7}y-7$ 或 $x=-\sqrt{7}y-7$.

14．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$B=\frac{\pi}{3}$，$A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的取值范围是__________.

【答案】$(0,12)$

【解析】$\frac{4}{\sin C}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}$，$\therefore b=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=4\cdot b\cos A=\frac{8\sqrt{3}\cos A}{\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A}=\frac{8\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\tan A+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

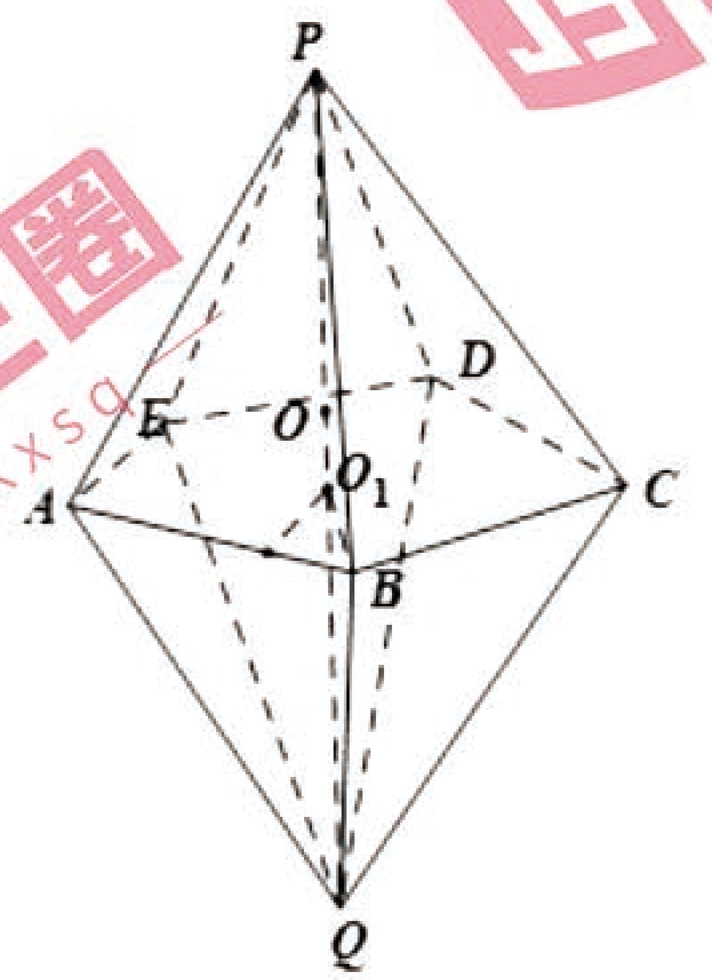
$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，$\tan A>\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{1}{2}\tan A+\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore 0<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<12$，

即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的取值范围 $(0,12)$.

15．某同学在劳技课上设计了一个球形工艺品，球的内部有两个内接正五棱锥，两正五棱锥的底面重合，若两正五棱锥的侧棱与底面所成的角分别为α、β，则$\tan\alpha+\tan\beta$的最小值为________.

【答案】2

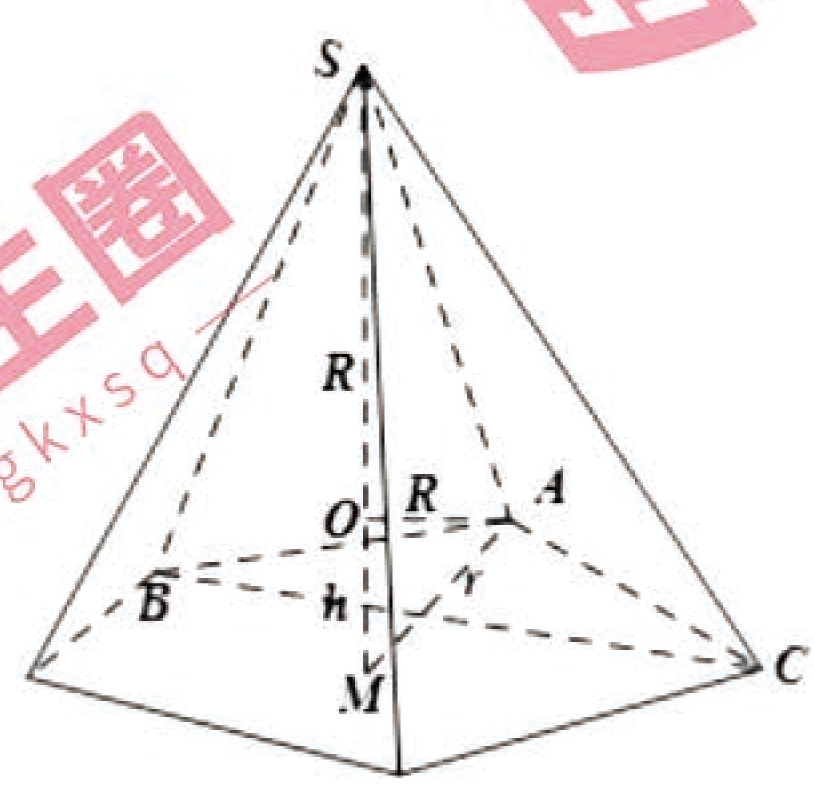
【解析】方法一：设正五棱锥$ABCD$中心O_1到顶点的距离为1，设$PO_1=x$，$QO_1=y$，球心O位于PQ上，且为PQ中点.



$\therefore PO=\dfrac{x+y}{2}$，由$PO=OB\Rightarrow \dfrac{x+y}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2+1}\Rightarrow \dfrac{4xy}{4}=1$，$xy=1$，

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}=x+y\geq 2\sqrt{xy}=2$，当且仅当$x=y=1$时取“=”.

方法二：设底面外接圆半径为r，圆心M，外接球半径R，球心O。



$\tan\alpha=\dfrac{R-h}{r}$，$\tan\beta=\dfrac{R+h}{r}$，$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{2R}{r}=\dfrac{2R}{\sqrt{R^2-h^2}}\geq\dfrac{2R}{R}=2$，

当且仅当$h=0$时取“=”。

16 .已知函数 $f(x)=2x^3-3x^2+cx+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点 x_1,x_2 ,且 $x_1<x_2$,则 $\dfrac{f(x_1)}{x_2}$ 的取值范围是________.

【答案】$\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$

【解析】$f'(x)=6x^2-6x+c=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有两个实根，

$\therefore \begin{cases} c>0 \\ 36-24c>0 \end{cases}$ ，$\therefore 0<c<\dfrac{3}{2}$ ，$x_1+x_2=1$ ，$x_1x_2=\dfrac{c}{6}$ ，$0<x_1<\dfrac{1}{2}$ ，

$$\frac{f(x_1)}{x_2}=\frac{2x_1^3-3x_1^2+cx_1+1}{1-x_1}=\frac{2x_1^3-3x_1^2+6x_1x_2x_1+1}{1-x_1}$$

$$=\frac{2x_1^3-3x_1^2+6x_1^2(1-x_1)+1}{1-x_1}=\frac{-4x_1^3+3x_1^2+1}{1-x_1}$$

$$=\frac{(1-x_1)(4x_1^2+x_1+1)}{1-x_1}=4x_1^2+x_1+1\in\left(1,\frac{5}{2}\right).$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17（10 分）已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $4a_{n+1}=3a_n-b_n+t$,$4b_{n+1}=3b_n-a_n-t$,$t\in\mathbf{R}$,$n\in\mathbf{N}^*$ ，且 $a_1=1$ ，$b_1=0$.

（1）求证：$\{a_n+b_n\}$ 是等比数列；

（2）若 $\{a_n\}$ 是递增数列，求实数 t 的取值范围.

【解析】

（1）$4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$ ，$2(a_{n+1}+b_{n+1})=a_n+b_n$ 且 $a_1+b_1=1\neq 0$ ，

$\therefore \{a_n+b_n\}$ 成首项为1，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，$a_n+b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

（2）$4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+2t$ ，

$2(a_{n+1}-b_{n+1})=2(a_n-b_n)+t$ ，$(a_{n+1}-b_{n+1})-(a_n-b_n)=\dfrac{t}{2}$ ，

$\therefore a_n-b_n=1+(n-1)\cdot\dfrac{t}{2}$ ，$\therefore a_n=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+1+(n-1)\cdot\dfrac{t}{2}}{2}$ ，

$\because \{a_n\}\nearrow$ ，$\therefore a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+n\cdot\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-(n-1)\cdot\dfrac{t}{2}\right]$

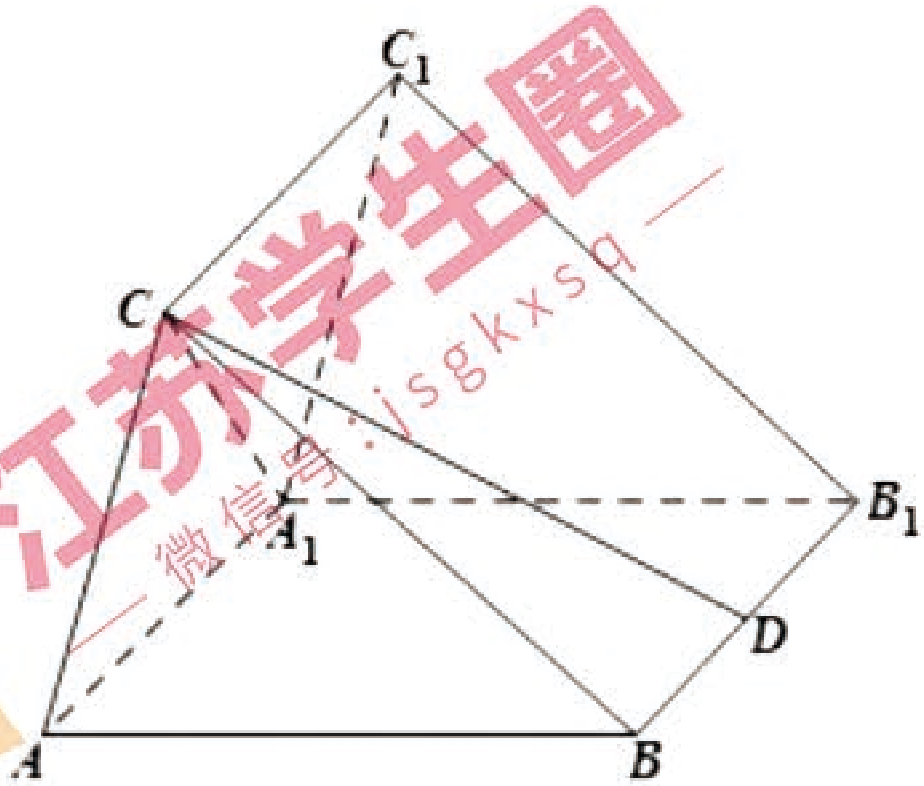
$=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{t}{2}\right)>0$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，$\therefore t>\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)_{\max}=1$ ，

$\therefore t$ 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

18．（12 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为正方形，点 D 为棱 BB_1 的中点，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABB_1A_1 ，$AA_1\perp CD$.

（1）求证：$CA=CA_1$ ；

（2）若 $AC=AB=2$ ，求二面角 $C-A_1D-B_1$ 的余弦值.



【解析】

（1）证明：取 AA_1 的中点 E ，连接 DE,CE ，

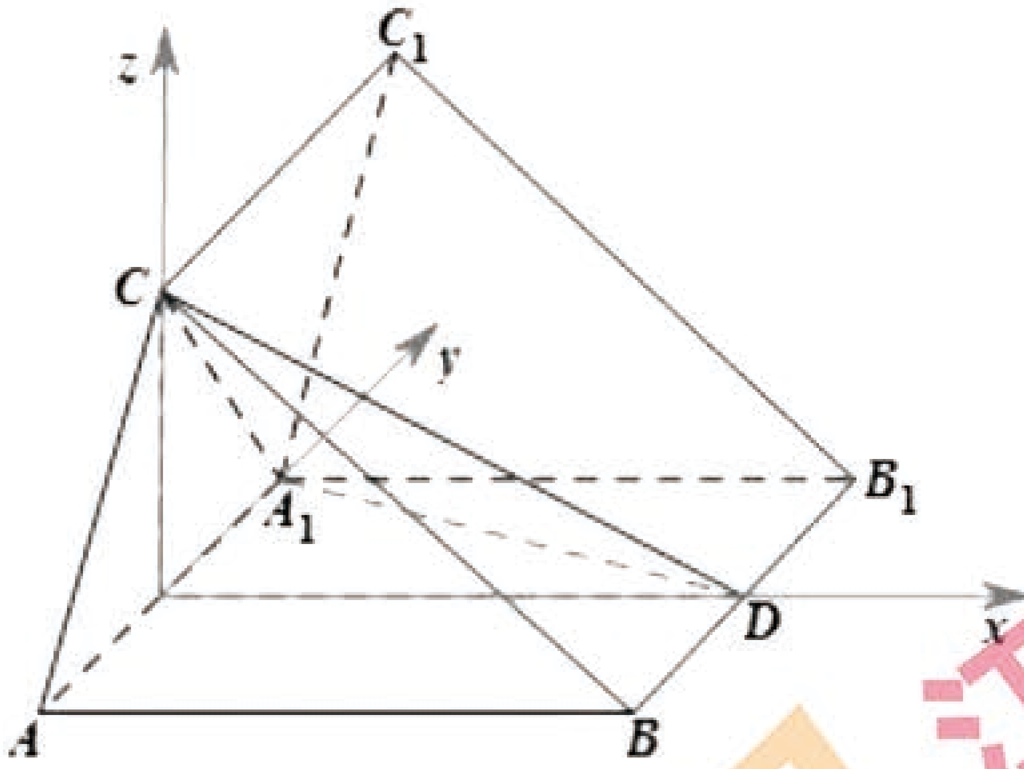
$\because D$ 为 BB_1 中点，四边形 ABB_1A_1 为正方形，$\therefore DE\perp AA_1$ ，

又 $\because AA_1\perp CD$ ，$CD\cap DE=D$ ，$\therefore AA_1\perp$ 平面 CDE ，

$\therefore AA_1\perp CE$ ，$\therefore CA=CA_1$.

（2）$\because$ 平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABB_1A_1 ，平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AA_1$ ，

$CE\perp AA_1$ ，$\therefore CE\perp$ 平面 ABB_1A_1 ，如图建系.



$AC=CA_1=AA_1=AB=2$，$CE=\sqrt{3}$，$\therefore C(0,0,\sqrt{3})$，$A_1(0,1,0)$，$D(2,0,0)$，

$\overrightarrow{CA_1}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(2,0,-\sqrt{3})$

设平面CA_1D的一个法向量$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，平面$A_1DB_1$的一个法向量$\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，

$$\therefore \begin{cases} y-\sqrt{3}z=0 \\ 2x-\sqrt{3}z=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},2\sqrt{3},2).$$

设二面角$C-A_1D-B_1$平面角为θ，显然θ为钝角，

$$\therefore \cos\theta=-\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=-\frac{2\sqrt{19}}{19}.$$

19.（12分）某中学对学生钻研奥数课程的情况进行调查，将每周独立钻研奥数课程超过6小时的学生称为“奥数迷”，否则称为“非奥数迷”，从调查结果中随机抽取100人进行分析，得到数据如下表所示：

	奥数迷	非奥数迷	总计
男	24	36	60
女	12	28	40
总计	36	64	100

（1）判断是否有99%的把握认为是否为“奥数迷”与性别有关？

（2）现从抽取的“奥数迷”中，按性别采用分层抽样的方法抽取3人参加奥数闯关比赛，已知其中男、女学生独立闯关成功的概率分别为$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$，在恰有两人闯关成功的条件下，求有女生闯关成功的概率.

参考数据与公式：

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

【解析】

（1）$K^2=\dfrac{100\times(24\times28-36\times12)}{60\times40\times36\times64}\approx1.04<2.706$，

$\therefore$没有99%的把握认为是否为“奥数迷”与性别有关.

（2）男女比例：$24:12=2:1$，应抽取男生2人，女生1人.

记事件A为恰有两人闯关成功，事件B为有女生闯关成功.

$P(A)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+C_2^1\cdot\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{16}$，$P(AB)=C_2^1\cdot\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{16}}=\dfrac{4}{7}$.

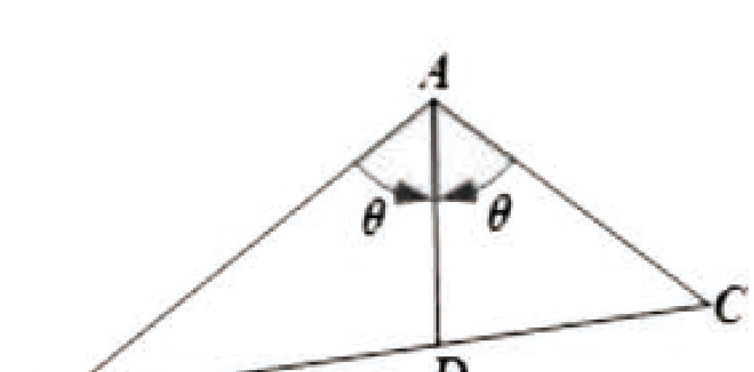
20．（12分）在$\triangle ABC$中，AD为$\triangle ABC$的角平分线，且$AD=2$.

（1）若$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$AB=3$，求$\triangle ABC$的面积；

（2）若$BD=3$，求边AC的取值范围.

【解析】

（1）在$\triangle ABC$中，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，



即$\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=6$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

（2）设$\angle BAD=\angle CAD=\theta$，在$\triangle ABD$中，$c^2+4-2\cdot 2\cdot c\cdot\cos\theta=9$

$\Rightarrow c^2-4c\cos\theta=5$，再由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}bc\sin 2\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot c\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot b\sin\theta$，$\therefore b+c=bc\cos\theta$，

$\therefore b+c=b\cdot\frac{c^2-5}{4}\Rightarrow bc^2-9b=4c\Rightarrow b=\frac{4c}{c^2-9}=\frac{4}{c-\frac{9}{c}}$，

且由$\begin{cases}0<\frac{c^2-5}{4c}<1\\ c^2-9>0\end{cases}\Rightarrow 3<c<5$，$\therefore b\in\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$.

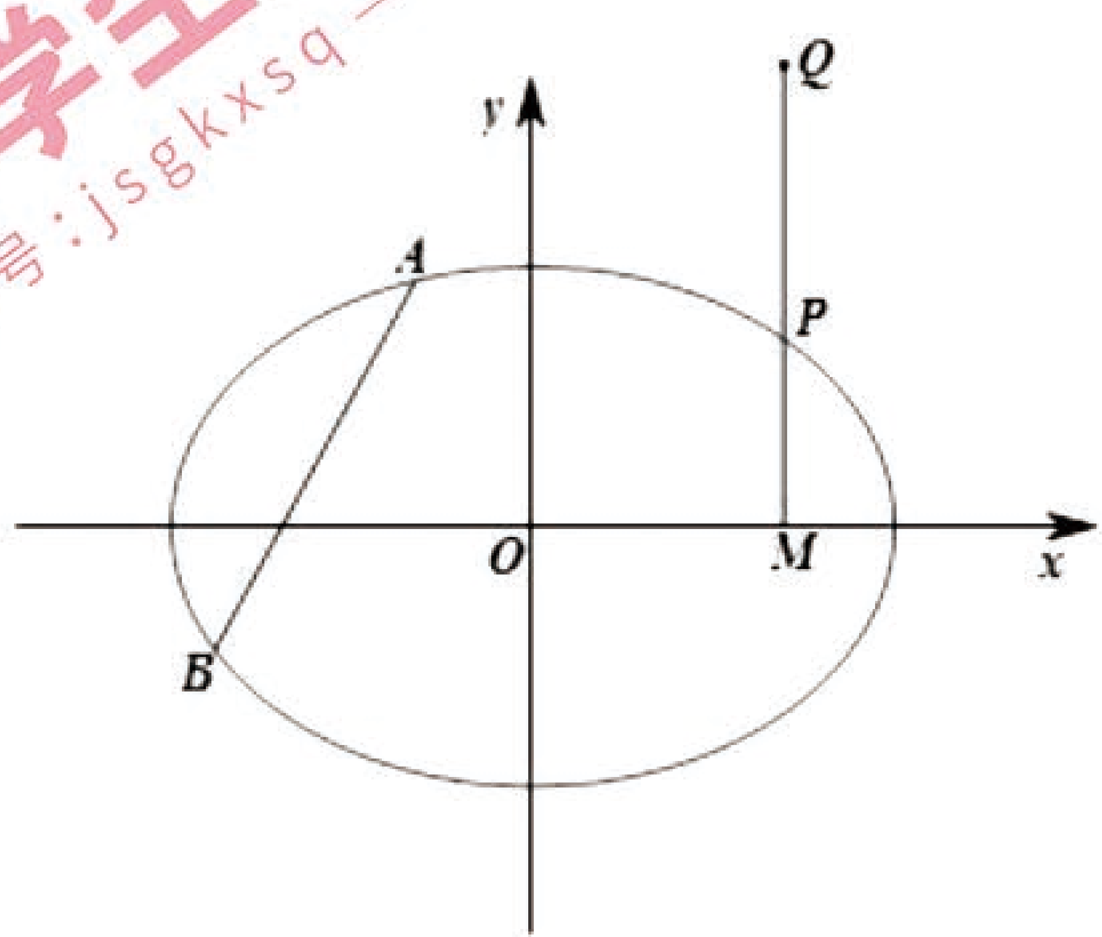
21．（12分）在平面直角坐标系xOy中，过椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的动点$P$作$x$轴的垂线，垂足为点$M$，$\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MP}$，$OQ=2$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）设直线$l:y=kx+m$交C于不同的两点A、B，向量$\vec{i}=(1,0)$，$\vec{j}=(0,1)$，是否存在常数k，使得满足$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{i}+2\overrightarrow{OB}\cdot\vec{j}=0$的实数$m$有无穷多解？若存在，请求出$k$的值；若不存在，请说明理由.

【解析】

（1）$P(x_0,y_0)$，$\because\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MP}$，$\therefore Q(x_0,2y_0)$.



$\because OQ=2$，$\therefore x_0^2+4y_0^2=4$，而$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，它与$\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$为同一方程，

$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$，椭圆$C$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \Rightarrow (1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，$\Delta>0$，

由$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{i}+2\overrightarrow{OB}\cdot\vec{j}=0 \Rightarrow x_1+2y_2=0$，即$x_1+2(kx_2+m)=0$对$\forall$符合条件的$m$恒成立，

$\therefore x_1+x_2+(2k-1)x_2+2m=0$，$\dfrac{-8km}{1+4k^2}+2m+(2k-1)x_2=0$

$\Rightarrow 2m\left(1-\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)+(2k-1)x_2=0$对$\forall$符合条件的$m$恒成立.

$\therefore \begin{cases} 1-\dfrac{4k}{1+4k^2}=0 \\ 2k-1=0 \end{cases} \Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$，代入$\Delta>0 \Rightarrow m^2<2$，$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$，

$\therefore k=\dfrac{1}{2}$时，存在无穷多个这样的$m$.

22．（12分）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a(a+\ln x)$.

（1）当$a=1$时，求$f(x)$的单调递增区间；

（2）若$f(x)\geq 0$恒成立，求a的取值范围.

【解析】

（1）$a=1$时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}(1+\ln x)$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}}{x}$，

$f'(x)$在$(0,+\infty)\nearrow$，注意到$f'(1)=0$.当$0<x<1$时，$f'(x)<0, f(x)\swarrow$；

当$x>1$时，$f'(x)>0, f(x)\nearrow$，$f(x)$的单调递增区间为$(1,+\infty)$.

（2）$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}^a}{x}$，$f'\left(\dfrac{\mathrm{e}^{a-1}}{1+\mathrm{e}^{a-1}}\right)<0$，$f'(\mathrm{e}^a)>0$，

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0 \in \left(\dfrac{e^{a-1}}{1+e^{a-1}}, e^a\right)$ 使 $f'(x_0)=0$，$e^{x_0}-\dfrac{e^a}{x_0}=0$，$x_0+\ln x_0=a$，

且当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0, f(x)\swarrow$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0, f(x)\nearrow$；

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-e^a(a+\ln x_0)\ge 0 \Rightarrow \dfrac{e^a}{x_0}-e^a(a+\ln x_0)\ge 0$，

$\dfrac{1}{x_0}-a-\ln x_0\ge 0$，$\therefore \dfrac{1}{x_0}-x_0-2\ln x_0\ge 0$，而 $g(x)=\dfrac{1}{x}-x-2\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上 $\swarrow$，

$g(x_0)\ge 0=g(1)\Rightarrow 0<x_0\le 1\Rightarrow a=x_0+\ln x_0\le 1$，

综上：a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.