中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 11 月测试

理科数学试卷

扫码查成绩

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x|x^2-2x-3<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{1,4\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{3,4\}$　　D．$\{1,2\}$

2．设 a，$b\in\mathbf{R}$，则“$a<b$”是“$ab<\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

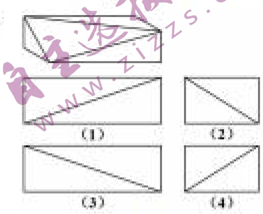
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．2021 年 8 月 27 日教育部在其网站发布了 2020 年全国教育事业发展统计公报，其中“十三五”时期全国高等教育在学总规模和毛入学率如下图所示，则下列四个回归方程类型中最适合作为毛入学率 y 和年份数 x 的回归方程类型是

（第 3 题图）

A．$y=a+bx$　　B．$y=a+bx^2$　　C．$y=a+be^x$　　D．$y=a+b\ln x$

4．已知长方体切去一个角的几何体直观图如图所示，在给出的 4 个平面图中，该几何体的主视图、侧视图、俯视图的序号依次是



（第 4 题图）

A．(1)(4)(3)

B．(1)(2)(3)

C．(3)(2)(1)

D. (3)(4)(1)

5. 2021年7月24日，国务院办公厅印发《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》．“双减”政策指出，要全面压减作业总量和时长，某校在“双减”前学生完成作业时长为随机变量ξ，ξ的期望为4，标准差为3，在“双减”后，该校学生完成作业的时长$\eta=0.5\xi-0.5$，η的期望为u，标准差为s，则

A. $u=1.5$，$s=1.5$　　B. $u=1.5$，$s=2$

C. $u=2$，$s=1.5$　　D. $u=2$，$s=2$

6. 已知向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(3,m)$．若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，则实数$m=$

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 0　　D. $-\sqrt{3}$

7. 对于非零实数a，b，以下四个式子均恒成立．对于非零复数a，b，下列式子仍然恒成立的是

A. $a^2=|a|^2$　　B. $a+\frac{1}{a}\neq 0$　　C. $a^2\geq 0$　　D. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

8. 若$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则$\sin 2\alpha=$

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　C. $\frac{7}{9}$　　D. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

9. 已知点A，B在双曲线$x^2-y^2=4$上，线段AB的中点为$M(3,1)$，则$|AB|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{5}$

10. 已知经过圆柱O_1O_2旋转轴的给定平面α，A，B是圆柱O_1O_2侧面上且不在平面α上的两点，则下列判断不正确的是

A. 一定存在直线l，$l\subset\alpha$且l与AB异面　　B. 一定存在直线l，$l\subset\alpha$且$l\perp AB$

C. 一定存在平面β，$AB\subset\beta$且$\beta\perp\alpha$　　D. 一定存在平面β，$AB\subset\beta$且$\beta\parallel\alpha$

11. 已知定义域为$\mathbf{R}$的奇函数$f(x)$满足：$f(x)=f(2-x)$，且当$x\in[0,1]$时，$f(x)=ax+b$．若$f(-1)=2$，则$f(-1.5)=$

A. -1　　B. -1.5　　C. 1　　D. 1.5

12. 已知x，y满足$x^2+y^2=4y-3$，则$\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$的最大值为

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 若实数 x，y 满足 $\begin{cases} x+y-2\le 0, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0, \end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的取值范围是________.

14. 音量大小的单位是分贝，强度为 I 的声波，其分贝 η 的定义是：$\eta=10\lg\frac{I}{I_0}$，其中 I_0 是人能听到声音的最低声波强度．设 50 分贝的声波强度 I_1 是 40 分贝声波强度 I_2 的 λ 倍，则 λ 的值为________.

15. 设锐角 ΔABC 三个内角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c，若 $a=2$，$b\sin A=\sqrt{3}$，$c=3$，则 $b=$________.

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，若对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f'(x)>4x$，则当 $\alpha\in[0,2\pi]$ 时，不等式 $f(\sin\alpha)+\cos 2\alpha>0$ 的解集为________.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每道试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. （12 分）近年来，人们的支付方式发生了巨大转变，使用移动支付购买商品已成为部分人的消费习惯．某企业社团部为了解该企业员工 A、B 两种支付方式的使用情况，随机抽取了 600 名男员工、400 名女员工，统计了他们的消费习惯，获得数据如下表：

	男员工			女员工		
	经常使用	偶尔使用	从不使用	经常使用	偶尔使用	从不使用
方式 A	200 人	300 人	100 人	300 人	100 人	0
方式 B	350 人	150 人	100 人	150 人	150 人	100 人

（1）分别估算该企业男、女员工从不使用方式 B 的概率；

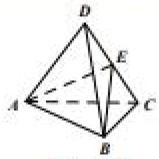
（2）从该企业全体男员工中随机抽取 2 人，全体女员工中随机抽取 1 人，估算这 3 人中恰有 2 人经常使用方式 A 的概率．

18. （12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列．

（1）若 a_1，a_3，a_4 成等比数列，求 a_1 的值；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $S_n\ge -20$，求 a_1 的取值范围．

19. （12 分）在三棱锥 $D-ABC$ 中，ΔACD 为正三角形，平面 $ACD\perp$ 平面 ABC，$AD\perp BC$，$AC=BC=2$．



（第 19 题图）

（1）求证：$BC\perp AC$；

（2）若 E 是 CD 的中点，求直线 CD 与平面 ABE 所成角的正弦值．

20. （12 分）有同学在研究指数函数 $y=2^x$ 和幂函数 $y=x^2$ 的图像时，发现它们在第一象限有两个交点 $(2,4)$ 和 $(4,16)$．通过进一步研究，该同学提出了如下两个猜想：

（1）函数 $y=e^x$ 与函数 $y=x^e$ 的图像在第一象限有且只有一个公共点；

（2）设 $a>1$，$b>1$，且 $a\neq b$，若 $a^b=b^a$，则 $ab>e^2$．

其中 e 为自然对数的底，请你证明或反驳该同学的猜想．

21. （12 分）已知抛物线Γ：$x^2=2py(p>0)$ 和点 $N(0,-1)$，且点 $M(2,y_M)$ 和线段 MN 的中点均在抛物线Γ上．

（1）求 P 的值；

（2）设点 P，Q 在抛物线Γ上，点 R 在曲线 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(y<0)$ 上，若线段 PR，QR 的中点均在抛物线Γ上，求 ΔPQR 面积 S 的最大值．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22. （10 分）[选修 4—4：坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\sin\theta-3=0$．

（1）求曲线 C 的直角坐标方程；

（2）设直线 l 与曲线 C 相交于 A，B 两点，若 $|AB|=2\sqrt{2}$，求 a 的值．

23. （10 分）[选修 4—5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=2|x+1|-|x-2|$．

（1）求不等式 $f(x)\le 0$ 的解集；

（2）设 $g(x)=|3x-a|$，若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $g(x)\ge f(x)$，求 a 的取值范围．