

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线



微信



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw

2021~2022 学年深州市中学高三年级期末考试

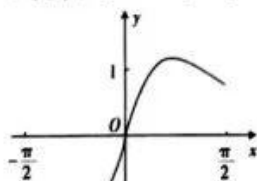
数 学 试 卷

考生注意：

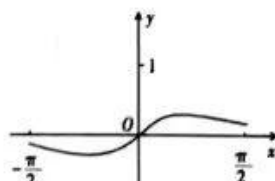
1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围：高考范围。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

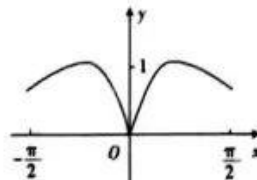
1. 已知集合 $A = \{x | 2^x < 4\}$, $B = \{x | -2 < \log_2 x < 2\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | \frac{1}{4} < x < 4\}$ B. $\{x | \frac{1}{4} < x < 2\}$ C. $\{x | 2 < x < 4\}$ D. $\{x | 1 < x < 2\}$
2. 已知复数 $z = (2 + ai)(1 + i)$ (其中 i 为虚数单位, $a \in \mathbb{R}$) 在复平面内对应的点为 $(1, 3)$, 则实数 a 的值为
A. 1 B. 2 C. -1 D. 0
3. 已知 $c = 1$, 则“ a, b 的平均数大于 1”是“ a, b, c 的平均数大于 1”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x^2 + |x| + 1}$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象为



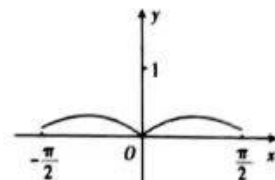
A



B



C



D

5. $\cos \frac{\pi}{24} \sin \frac{23\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{12} =$

A. $\frac{1}{16}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{16}$

【高三期末考试·数学 第 1 页 (共 4 页)】



6. $(1+x^2-\frac{2}{x})(1+x)^5$ 展开式中 x^2 的系数为

- A. 1 B. -9 C. 31 D. -19

7. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $b_n = \frac{a_n^4}{a_{n+1}^3}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若对于一切正整数 n 都有 $S_n < T_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 的取值范围为

- A. $(1, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(0, 4)$

8. 已知函数 $f(x) = 2^x |2^x - a|$, 若 $0 \leq x \leq 1$ 时 $f(x) \leq 1$, 则实数 a 的取值范围为

- A. $[\frac{7}{4}, 2]$ B. $[\frac{5}{3}, 2]$ C. $[\frac{3}{2}, 2]$ D. $[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})\sin x + \cos 2x$, 则

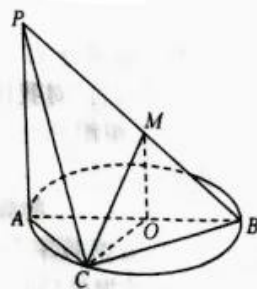
- A. $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$
B. $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}$
C. $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
D. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后关于 y 轴对称

10. 已知双曲线 C 过点 $(3, \sqrt{2})$, 且渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则下列结论中正确的是

- A. 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$
B. 双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$
C. 曲线 $y = e^{x-2} - 1$ 经过双曲线 C 的一个焦点
D. 直线 $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ 与双曲线 C 有两个公共点

11. 如图, AB 为圆 O 的直径, 点 C 在圆周上 (异于点 A, B), 直线 PA 垂直于圆 O 所在的平面, 点 M 是线段 PB 的中点, 下列命题是真命题的是

- A. $MO \parallel$ 平面 PAC
B. $PA \parallel$ 平面 MOB
C. $OC \perp$ 平面 PAC
D. 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC



12. 已知函数 $f(x) = x^2 e^{x-2} + \ln x - 2$ 的零点为 x_0 , 则

- A. $e^{2-x_0} + \ln x_0 + 3$ 的值为 5
B. $e^{2-x_0} + \ln x_0 + 3$ 的值为 4
C. $x_0 \in (1, \frac{3}{2})$
D. $x_0 \in (\frac{3}{2}, 2)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若向量 a, b 满足 $|a| = 3$, 且 $(a+b) \cdot (a-b) = 4$, 则 $|b| =$ _____.

14. 已知正实数 a, b 满足 $3a + 2b = 1$, 则 $\frac{6}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 _____.



15. 设 A_1, A_2, B_1 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右、上顶点, O 为坐标原点, D 为线

段 OB_1 的中点, 过 A_2 作直线 A_1D 的垂线, 垂足为 H . 若 H 到 x 轴的距离为 $\frac{16}{9}|OD|$, 则 C 的离心率为_____.

16. 四面体 $ABCD$ 的顶点 A, B, C, D 在同一个球面上, $AB = BC = AC = 6$. 若该球的表面积为 64π , 则四面体 $ABCD$ 体积的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知向量 $m = (\sqrt{3}b, \sqrt{3}c - 2a), n = (\cos C, \cos B)$, 且 $m \perp n$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\sin A + \cos C = \sqrt{3}$, 且 $a = 3\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = 3, a_{n+1} = 2S_n + 3 (n \in \mathbb{N}^+)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

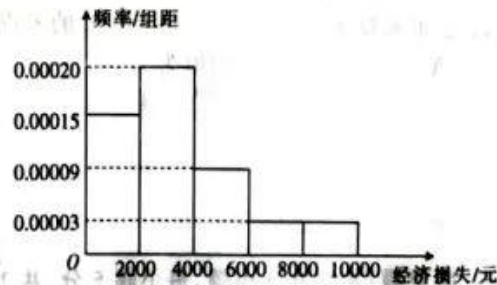
(2) 设 $b_n = \log_3 a_n$, 若数列 $\left\{ \frac{1}{b_n b_{n-1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < 1$.

19. (本小题满分 12 分)

台风“山竹”对我国多个省市的财产造成重大损害, 据统计直接经济损失达 52 亿元. 某青年志愿者组织调查了某地区的 50 个农户在该次台风中造成的直接经济损失, 将收集的损失数据分成五组: $[0, 2000], (2000, 4000], (4000, 6000], (6000, 8000], (8000, 10000]$ (单位: 元), 得到如图所示的频率分布直方图.

(1) 试根据频率分布直方图估计该地区每个农户的损失 (同一组中的数据用该组区间的中点值代表);

(2) 台风后该青年志愿者与当地政府向社会发出倡议, 为该地区的农户捐款帮扶, 现从这 50 户并且损失超过 4000 元的农户中随机抽取 2 户进行重点帮扶, 设抽出损失超过 8000 元的农户数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

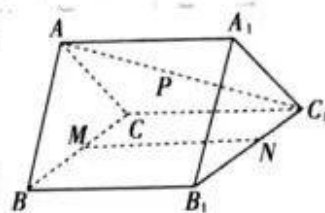


20. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $BC \perp BB_1$, $CC_1 = \sqrt{2}$, $AC_1 = \sqrt{6}$.

(1)证明:平面 $ABC \perp$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) M, N 分别是 BC, B_1C_1 的中点, P 是线段 AC_1 上的动点,若二面角 $P-MN-C$ 的平面角的大小为 30° ,试确定点 P 的位置.



21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 点 F 为 C 的焦点, 过 F 的直线 l 交 C 于 A, B 两点.

(1)设 A, B 在 C 的准线上的射影分别为 P, Q , 线段 PQ 的中点为 R , 证明: $AR \parallel FQ$;

(2)在 x 轴上是否存在一点 T , 使得直线 AT, BT 的斜率之和为定值? 若存在, 求出点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{x-a} - \ln(x+a)$ ($a > 0$).

(1)证明: 函数 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的零点;

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 1, 求 a 的值.



2021~2022 学年深州市中学高三年级期末考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1. B 易解得 $A = (-\infty, 2)$, $B = (\frac{1}{4}, 4)$, 即 $A \cap B = (\frac{1}{4}, 2)$.

2. A $z = (2+ai)(1+i) = 2-a+(a+2)i$, 由题意可知, $\begin{cases} 2-a=1 \\ a+2=3 \end{cases}$, 解得 $a=1$.

3. C 若 a, b, c 的平均数大于 1, 则 $\frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+1}{3} > 1$, $\therefore a+b > 2$, $\therefore \frac{a+b}{2} > 1$,

即 a, b 的平均数大于 1, 反之亦成立, 故选 C.

4. D $\because f(-x) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 为偶函数, 故排除 A, B. $\because |\sin x| \leq 1$, $x^2 + |x| + 1 \geq 1$, $\therefore |f(x)| < 1$, 故排除 C, 从而选 D.

5. C $\cos \frac{\pi}{24} \sin \frac{23\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{24} \sin (\pi - \frac{\pi}{24}) \sin (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12})$
 $= \cos \frac{\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}$.

6. B $(1+x)^5$ 的展开式中第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_5^r x^r$, 其 x^2 的系数, 常数项, x^3 的系数分别为 C_5^2, C_5^0, C_5^3 , 故 $(1+x^2 - \frac{1}{x})(1+x)^5$ 展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2 + C_5^0 - 2C_5^3 = -9$.

7. B 若 $q=1$, 此时 $a_n = b_n = a_1$, 有 $S_n = T_n$, 不合题意, 可知 $q \neq 1$.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, b_n = \frac{a_1}{q^3}, T_n = \frac{\frac{a_1}{q^3}(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^n)}{q^3(1-q)}$$

$$T_n - S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \left(\frac{1}{q^3} - 1 \right) = \frac{a_1(1-q^n)(1-q^3)}{q^3(1-q)} = \frac{a_1(1-q^n)(1+q+q^2)}{q^3}$$

由 $a_1 > 0, q > 0$, 若 $T_n > S_n$, 必有 $1-q^n > 0$, 得 $q^n < 1$, 故 $0 < q < 1$.

8. C 不等式 $f(x) \leq 1$ 可化为 $|2^x - a| \leq 2^{-x}$, 有 $-2^{-x} \leq a - 2^x \leq 2^{-x}$, 有 $2^x - 2^{-x} \leq a \leq 2^x + 2^{-x}$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,
 $2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$ (当且仅当 $x=0$ 时取等号), $2^x - 2^{-x} \leq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 故有 $\frac{3}{2} \leq a \leq 2$.

9. ACD $f(x) = 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) \sin x + \cos 2x = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos 2x$,

所以 $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$, 所以 AC 正确, B 错误,

因为 $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = \cos 2x + \frac{1}{2}$, 则 D 正确.

10. AC 对于 A: 由双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 可设双曲线方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 把点 $(3, \sqrt{2})$ 代入,
 得 $\frac{9}{3} - 2 = \lambda$, 即 $\lambda = 1$. 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, 故 A 选项正确; 对于 B: 由 $a^2 = 3, b^2 = 1$, 得 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$, 所以双曲线 C 的离心率为 $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 B 选项错误; 对于 C: 取 $x+2=0$, 得 $x=-2, y=0$, 曲线 $y = e^{x-2} - 1$ 过定点 $(-2, 0)$, 故 C 选项正确; 对于 D: 双曲线的渐近线方程为 $x \pm \sqrt{3}y = 0$, 直线 $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ 与双曲线的渐近线平行, 直线 $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ 与 C 有 1 个公共点, 故 D 不正确.

11. AD 因为 AB 为圆 O 的直径, M 是线段 PB 的中点,

所以 $OM \parallel PA$, 又 $OM \not\subset$ 平面 PAC, $PA \subset$ 平面 PAC, 所以 $MO \parallel$ 平面 PAC, 即 A 正确;

又 $PA \subset$ 平面 PAB, 即 $PA \subset$ 平面 MOB, 故 B 错误;

因为点 C 在圆 O 的圆周上, 所以 $AC \perp CB$, 故 OC 不与 AC 垂直, 所以 OC 不可能与平面 PAC 垂直, 即 C 错误;

由直线 PA 垂直于圆 O 所在的平面, 所以 $PA \perp BC$.



- 又 $AC \perp CB, AC \cap PA = A, AC \subset \text{平面 } PAC, PA \subset \text{平面 } PAC$, 所以 $BC \perp \text{平面 } PAC$,
又 $BC \subset \text{平面 } PBC$, 所以平面 $PAC \perp \text{平面 } PBC$, 即 D 正确.
12. AD $\because x_0^2 e^{x_0-2} + \ln x_0 - 2 = 0, \therefore e^{x_0+2\ln x_0-2} + \ln x_0 - 2 = 0, \therefore e^{x_0+2\ln x_0-2} + (x_0 + 2\ln x_0 - 2) = x_0 + \ln x_0$.
令 $F(x) = e^x + x$, 为增函数, $\therefore$ 由 $F(x_0 + 2\ln x_0 - 2) = F(\ln x_0)$, 得 $x_0 + 2\ln x_0 - 2 = \ln x_0, \therefore x_0 + \ln x_0 = 2$.
 $\therefore e^{x_0+2\ln x_0-2} + \ln x_0 + 3 = e^{\ln x_0} + \ln x_0 + 3 = x_0 + \ln x_0 + 3 = 5$.
由 $f(1) = \frac{1}{e} - 2 < 0, f(2) = 2 + \ln 2 > 0$, 又由 $\sqrt{e} > \frac{3}{2}, e^{-\frac{1}{2}} < \frac{2}{3}$, 有 $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}} + \ln \frac{3}{2} - 2 < \frac{9}{4} \times \frac{2}{3} + \ln \sqrt{e} - 2 < \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 0$, 有 $x_0 \in (\frac{3}{2}, 2)$
13. $\sqrt{5} \because (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 = 9 - |b|^2 = 4, \therefore |b| = \sqrt{5}$.
14. 32 由 $a > 0, b > 0$ 且 $3a + 2b = 1$, 得 $\frac{6}{a} + \frac{1}{b} = (\frac{6}{a} + \frac{1}{b})(3a + 2b) = 18 + \frac{12b}{a} + \frac{3a}{b} + 2 \geq 20 + 2\sqrt{\frac{12b}{a} \cdot \frac{3a}{b}} =$
32, 当且仅当 $\frac{12b}{a} = \frac{3a}{b}$, 即 $a = 2b$ 时, 取等号, 此时 $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$, 则 $\frac{6}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 32.
15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 直线 A_1D 的方程为 $y = \frac{b}{2a}(x+a)$, 直线 A_2H 的方程为 $y = -\frac{2a}{b}(x-a)$,
联立 $\begin{cases} y = \frac{b}{2a}(x+a), \\ y = -\frac{2a}{b}(x-a), \end{cases}$ 得 $y = \frac{4a^2b}{4a^2+b^2}, \therefore \frac{16}{9}|OD| = \frac{16}{9} \times \frac{b}{2} = \frac{8b}{9}, \therefore \frac{4a^2b}{4a^2+b^2} = \frac{8b}{9},$
 $\therefore a^2 = 2b^2, e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
16. $18\sqrt{3}$ 因为球的表面积为 64π , 所以球的半径 $R = 4$. 因为 $AB = BC = AC = 6$, 所以 $\triangle ABC$ 的高为 $3\sqrt{3}$, 记四面体 $ABCD$ 外接球球心为 O , 则三棱锥 $O-ABC$ 的高为 $\sqrt{4^2 - (\frac{2}{3} \times 3\sqrt{3})^2} = 2$, 所以四面体 $ABCD$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (2+4) = 18\sqrt{3}$.
17. 解: (1) 根据题意 $m \perp n$, 可得 $\sqrt{3}b \cos C + (\sqrt{3}c - 2a) \cos B = 0$, 1 分
化简整理得 $\sqrt{3}(\sin B \cos C + \sin C \cos B) = 2 \sin A \cos B$, 2 分
即 $\sqrt{3} \sin A = 2 \sin A \cos B$, 3 分
因为 $\sin A \neq 0$, 所以 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 4 分
则 $B = \frac{\pi}{6}$, 5 分
(2) 由 (1) 知 $C = \frac{5\pi}{6} - A$,
则 $\sin A + \cos C = \sin A + \cos(\frac{5\pi}{6} - A) = \frac{3}{2} \sin A - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = \sqrt{3} \sin(A - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$, 7 分
又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$, 8 分
因为 $a = 3\sqrt{3}$, 所以 $b = c = \frac{a}{\sin A} \times \sin B = 3$, 9 分
故 $\triangle ABC$ 的周长为 $6 + 3\sqrt{3}$ 10 分
18. (1) 解: 因为 $a_{n+1} = 2S_n + 3$, ①
 $a_n = 2S_{n-1} + 3$, ② 1 分
① - ② 得 $a_{n+1} - a_n = 2a_n$, 即 $a_{n+1} = 3a_n (n \geq 2)$, 3 分
所以 $\{a_n\}$ 为从第 2 项开始的等比数列, 且公比 $q = 3$, 4 分
又 $a_1 = 3$, 所以 $a_2 = 9$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 3^n (n \geq 2)$, 5 分
当 $n = 1$ 时, $a_1 = 3$ 满足上式, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^n$ 6 分



(2)证明:由(1)知 $b_n = \log_3 a_n = \log_3 3^n = n$, 8分

所以 $\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 10分

所以 $T_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$= 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ 得证. 12分

19. 解:(1)记每户农户的平均损失为 $\bar{x}$ 元,则 $\bar{x} = (1000 \times 0.00015 + 3000 \times 0.00020 + 5000 \times 0.00009 + 7000 \times 0.00003 + 9000 \times 0.00003) \times 2000 = 3360$ 5分

(2)由频率分布直方图,可得损失超过4000元的农户共有 $(0.00009 + 0.00003 + 0.00003) \times 2000 \times 50 = 15$ 户,损失超过8000元的农户共有 $0.00003 \times 2000 \times 50 = 3$ 户,随机抽取2户,则 X 的可能值为0,1,2, 7分

$P(X=0) = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{22}{35}$, 8分

$P(X=1) = \frac{C_{12}^1 \cdot C_3^1}{C_{15}^2} = \frac{12}{35}$, 9分

$P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_{15}^2} = \frac{1}{35}$, 10分

X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$E(X) = 0 \times \frac{22}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{1}{35} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$ 12分

20. (1)证明:因为 $AC = 2, CC_1 = \sqrt{2}, AC_1 = \sqrt{6}$,

所以 $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$, 即 $AC \perp CC_1$ 2分

又因为 $BC \perp BB_1, BB_1 \parallel CC_1$, 所以 $BC \perp CC_1$ 3分

$AC \cap BC = C$, 所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC 4分

因为 $CC_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以平面 $ABC \perp$ 平面 BB_1C_1C 5分

(2)解:连接 AM , 因为 $AB = AC = 2, M$ 是 BC 的中点, 所以 $AM \perp BC$.

由(1)知, 平面 $ABC \perp$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $AM \perp$ 平面 BB_1C_1C .

以 M 为原点建立如图所示的空间直角坐标系 $M-xyz$,

则平面 BB_1C_1C 的一个法向量是 $m = (0, 0, 1), A(0, 0, \sqrt{3}), N(0, \sqrt{2}, 0),$

$C_1(-1, \sqrt{2}, 0)$ 7分

设 $\overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AC_1} (0 < t < 1), P(x, y, z)$,

$\overrightarrow{AP} = (x, y, z - \sqrt{3}), \overrightarrow{AC_1} = (-1, \sqrt{2}, -\sqrt{3})$,

代入上式得 $x = -t, y = \sqrt{2}t, z = \sqrt{3}(1-t)$, 所以 $P(-t, \sqrt{2}t, \sqrt{3} - \sqrt{3}t)$ 8分

设平面 MNP 的一个法向量为 $n = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{MN} = (0, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{MP} = (-t, \sqrt{2}t, \sqrt{3} - \sqrt{3}t)$,

由 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} \sqrt{2}y_1 = 0 \\ -tx_1 + \sqrt{2}ty_1 + \sqrt{3}(1-t)z_1 = 0 \end{cases}$.

令 $z_1 = t$, 得 $n = (\sqrt{3} - \sqrt{3}t, 0, t)$ 10分

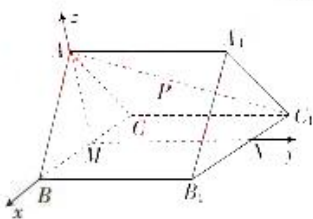
因为二面角 $P-MN-C$ 的平面角的大小为 30° ,

所以 $\frac{m \cdot n}{|m||n|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\frac{t}{\sqrt{3(1-t)^2 + t^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $t = \frac{3}{4}$ 11分

所以点 P 为线段 AC_1 上靠近点 C_1 的四等分点, 且坐标为 $P(-\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ 12分

21. (1)证明:设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), F(1, 0)$,

故可设直线 l 的方程为 $x = my + 1$





- 由 $\begin{cases} x=my+1, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$, 2 分
- 则 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4$, 3 分
- 由题意可知 $P(-1, y_1), Q(-1, y_2), R(-1, \frac{y_1+y_2}{2})$,
- 则 $k_{AR} = \frac{y_1 - \frac{y_1+y_2}{2}}{x_1+1} = \frac{y_1-y_2}{2(x_1+1)}, k_{PQ} = \frac{y_2}{-1-1} = -\frac{y_2}{2}$ 4 分
- 因为 $k_{AR} - k_{PQ} = \frac{y_1-y_2}{2(x_1+1)} - (-\frac{y_2}{2}) = \frac{y_1+x_1y_2}{2(x_1+1)} = \frac{y_1+\frac{y_1^2}{4}}{2(x_1+1)}$
- $= \frac{y_1+\frac{y_1y_2}{4} \cdot y_1}{2(x_1+1)} = \frac{y_1+\frac{-4}{4} \cdot y_1}{2(x_1+1)} = 0$, 6 分
- 所以 $k_{AR} = k_{PQ}$, 故 $AR \parallel PQ$ 7 分
- (2) 解: 假设存在点 $T(a, 0)$ 满足题意, 设直线 AT, BT 的斜率分别为 k_1, k_2 .
- $k_1 = \frac{y_1}{x_1-a} = \frac{y_1}{my_1+1-a}, k_2 = \frac{y_2}{x_2-a} = \frac{y_2}{my_2+1-a}$, 8 分
- 则 $k_1+k_2 = \frac{y_1}{my_1+1-a} + \frac{y_2}{my_2+1-a} = \frac{2my_1y_2+(1-a)(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+m(1-a)(y_1+y_2)+(1-a)^2}$ 9 分
- $= \frac{-4m(a+1)}{-4m^2+4m^2(1-a)+(1-a)^2}$ 10 分
- 因为 $m \in \mathbf{R}$, 且 $\frac{-4m(a+1)}{-4m^2+4m^2(1-a)+(1-a)^2}$ 为常数,
- 所以 $a+1=0$, 即 $a=-1$, 11 分
- 故存在点 $T(-1, 0)$ 满足题意. 12 分
22. (1) 证明: $\because f(x) = e^{x-a} - \ln(x+a) (a>0), \therefore f'(x) = e^{x-a} - \frac{1}{x+a}$ 1 分
- $\because e^{x-a}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\frac{1}{x+a}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减,
- $\therefore$ 函数 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 2 分
- 又 $f'(0) = e^{-a} - \frac{1}{a} = \frac{a-e^a}{ae^a}$, 令 $g(a) = a - e^a (a>0), g'(a) = 1 - e^a < 0$,
- 则 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $g(a) < g(0) = -1$, 故 $f'(0) < 0$ 3 分
- 令 $m = a+1$, 则 $f'(m) = f'(a+1) = e - \frac{1}{2a+1} > 0$, 4 分
- 所以函数 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的零点. 5 分
- (2) 解: 由(1)可知存在唯一的 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(x_0) = e^{x_0-a} - \frac{1}{x_0+a} = 0$, 即 $e^{x_0-a} = \frac{1}{x_0+a} (*)$ 6 分
- 函数 $f'(x) = e^{x-a} - \frac{1}{x+a}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
- $\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.
- $\therefore f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0-a} - \ln(x_0+a)$,
- 由(*)式得 $f(x)_{\min} = f(x_0) = \frac{1}{x_0+a} - \ln(x_0+a)$ 9 分
- $\therefore \frac{1}{x_0+a} - \ln(x_0+a) = 1$, 显然 $x_0+a=1$ 是方程的解, 10 分
- 又 $\because y = \frac{1}{x} - \ln x$ 是单调递减函数, 方程 $\frac{1}{x_0+a} - \ln(x_0+a) = 1$ 有且仅有唯一的解 $x_0+a=1$,
- 把 $x_0=1-a$ 代入(*)式, 得 $e^{1-2a}=1, \therefore a=\frac{1}{2}$, 即所求实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 12 分