2020年全国高考调研模拟试卷(二)

数学(文科)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	D	A	C	B	D	A	A	C	B	D

【答案提示】

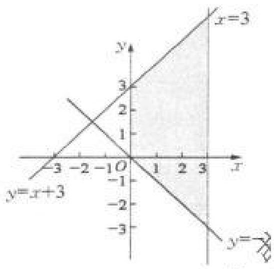
1. B $\because A=\{x|x\geqslant 1\}, B=\{x|x^2-5x-6\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$, $\therefore A\cap B=\{x|1\leqslant x\leqslant 6\}$. 故选 B.

2. C $\because z_1=2i-1=-1+2i$, $\therefore \bar{z}_1=-1-2i$, $\therefore$复数$\bar{z}_1$在复平面上对应的点在第三象限. 故选 C.

3. D “$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+x+1>0$”的否定是“$\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+x_0+1\leqslant 0$”. 故选 D.

4. A $\because \cos\theta=\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\therefore 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2}$, $\therefore 2\sin^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{1}{2}$. 故选 A.

5. C 画出不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-y+3\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$表示的平面区域如图阴影区域:



据题设分析知,当$x=3, y=6$时,x^2+y^2取得最大值,且$(x^2+y^2)_{max}=3^2+6^2=45$. 故选 C.

6. B 据题意,得$\bar{x}=\frac{-2+(-1)+0+1+2}{5}=0$, $\bar{y}=\frac{5+4+2+2+1}{5}=2.8$. 又$y$关于$x$的线性回归方程是$\hat{y}=-x+m$,所以$2.8=-1\times 0+m$,所以$m=2.8$. 故选 B.

7. D 据题意,得$f(9)=\log_3 9=2$. 又$\because f(9)=2f(a)$, $\therefore f(a)=1$. 讨论:当$a>0$时,$\log_3 a=1$, $\therefore a=3$;当$a\leqslant 0$时,$a^2=1$, $\therefore a=1$(舍)或$a=-1$. 综上,$a=-1$或$a=3$,故选 D.

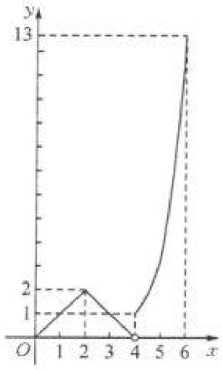
8. A $S=0, i=1, i\leqslant 5$成立;$S=0-1=-1, i=2, i\leqslant 5$成立;$S=-1-2=-3, i=3, i\leqslant 5$成立;$S=-3-3=-6, i=4, i\leqslant 5$成立;$S=-6-4=-10, i=5, i\leqslant 5$成立,$S=-10-5=-15, i=6$,此时不满足$i\leqslant 5$,循环结束,输出$S$的值是$-15$. 故选 A.

9. A 据题意,得$\frac{b-0}{0-(-a)}\times\frac{b-0}{0-c}=-1$, $\therefore \frac{b^2}{ac}=1$. 又$\because c^2=a^2-b^2$, $\therefore c^2=a^2-ac$, $\therefore \left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-1=0$, $\therefore \frac{c}{a}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$(舍)或$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故选 A.

10. C　据三视图分析知，该几何体是三棱锥，其底面三角形边长均为$\sqrt{2}$，侧棱长是 1，侧面三角形是直角顶点公共的等腰三角形，所以该几何体外接球半径 $R=\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，外接球表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi$. 故选 C.

11. B　令 $\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)=1(\omega>0)$，则 $\omega x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=\frac{(6k+1)\pi}{3\omega}(k\in\mathbf{Z})$. ∴函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图象在 y 轴右侧第一个最高点坐标是$\left(\frac{\pi}{3\omega},1\right)$. 又函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，∴$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{3\omega}$，∴$0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$. 故选 B.

12. D　函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x-2|, 0\leqslant x<4,\\ \frac{2^x}{4}-3, 4\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$ 的图象如下图：



据题意，得 $1\leqslant x_1\leqslant 3$，$2-|x_1-2|=\frac{2^{x_2}}{4}-3=f(x_2)$，∴$x_1\cdot f(x_2)=x_1(2-|x_1-2|)=2x_1-x_1|x_1-2|$ $(1\leqslant x_1\leqslant 3)$.

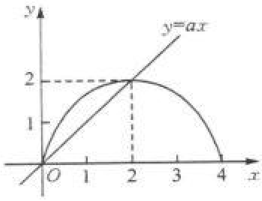
讨论：当 $1\leqslant x_1\leqslant 2$ 时，$x_1f(x_2)=2x_1-x_1(2-x_1)=2x_1-2x_1+x_1^2=x_1^2$；当 $2\leqslant x_1\leqslant 3$ 时，$x_1f(x_2)=2x_1-x_1(x_1-2)=2x_1-x_1^2+2x_1=-x_1^2+4x_1$. 分析知，$x_1f(x_2)$的取值范围是$[1,4]$. 故选 D.

13. 3　据题意，得点$(1,2)$在直线 $x+y-a=0$ 上，∴$1+2-a=0$，∴$a=3$.

14. 150°　据题意，得$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，∴$3|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$. 又$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，∴$3\times1^2+2\times1\times\sqrt{3}\times\cos\theta=0$，∴$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ$，∴$\theta=150^\circ$.

15. $\frac{25}{3}$　∵$3a\cos C-4c\sin B\cos C=4c\cos B\sin C$，∴$3a\cos C=4c\sin B\cos C+4c\cos B\sin C$，∴$3a\cos C=4c\sin(B+C)$. 又∵$A+B+C=\pi$，∴$3a\cos C=4c\sin A$. 又∵$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，∴$\cos C=\frac{4}{3}\sin C$，∴$\frac{16}{9}\sin^2C+\sin^2C=1$. 又 $c\in(0,\pi)$，∴$\sin C=\frac{3}{5}$. 又$\triangle ABC$ 的面积为 10，$b=4$，∴$\frac{1}{2}\times a\times4\times\frac{3}{5}=10$，∴$a=\frac{25}{3}$.

16. $(-\infty,1]$　令 $y=\sqrt{x(4-x)}$，则 $(x-2)^2+y^2=4(y\geq 0)$，画出函数 $y=\sqrt{x(4-x)}$ 的图象如图：



令 $y=ax$.

讨论：当 $a\leq 0$ 时，$ax\leq\sqrt{x(4-x)}$ 对 $\forall x\in[0,2]$ 成立；当 $a>0$ 时，若 $ax\leq\sqrt{x(4-x)}$ 对 $\forall x\in[0,2]$ 成立，则 $0<a\leq 1$. 综上，所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

17. 解：(1) ∵ a_3 是 a_2-4，a_4 的等差中项，

∴ $2a_3=a_2-4+a_4$. …………………………………… 1 分

令 $a_n=a_1q^{n-1}$，据题意，得 $\begin{cases}a_1q+a_1q^2+a_1q^3=28,\\2a_1q^2=a_1q-4+a_1q^3,\end{cases}$ …………………………………… 3 分

解之得 $\begin{cases}q=2,\\a_1=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}q=\frac{1}{2},\\a_1=32.\end{cases}$ …………………………………… 4 分

又 $0<a_n<a_{n+1}$，∴ $\begin{cases}q=2,\\a_1=2,\end{cases}$ …………………………………… 5 分

∴ $a_n=2^n$. …………………………………… 6 分

(2) 据(1)求解知，$a_n=2^n$，

∴ $b_n=a_n\log_2 a_n=2^n\log_2 2^n=n\times 2^n$. …………………………………… 7 分

∴ $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$，…………………………………… 8 分

∴ $2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\times 2^{n+1}$，…………………………………… 9 分

∴ $S_n-2S_n=1\times 2^1+1\times 2^2+1\times 2^3+\cdots+1\times 2^n-n\times 2^{n+1}$，…………………………………… 10 分

∴ $-S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times 2^{n+1}$，

∴ $S_n=(n-1)\times 2^{n+1}+2$.

即数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $(n-1)\times 2^{n+1}+2$. …………………………………… 12 分

18. 证明：(1) 据四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 性质知，$AA_1 /\!/ BB_1$. …………………………………… 1 分

又因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………… 2 分

又因为 $DE\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp DE$，即 $DE\perp AA_1$. …………………………………… 3 分

设 $BA=m$.

又因为在平行四边形 $ABCD$ 中，$BC=2BA$，$\angle ABC=60^\circ$，E 为 BC 中点，

所以 $AE=EC=m$，$CD=m$，$AD=2m$，$\angle ECD=120^\circ$，

所以 $DE=\sqrt{m^2+m^2-2\cdot m\cdot m\cdot\cos 120^\circ}=\sqrt{3}m$，

所以 $AD^2=AE^2+DE^2$，

所以 $\angle AED=90°$，即 $DE\perp AE$. ………………………… 5 分

又因为 $AA_1\cap AE=A$，$AA_1\subset$ 平面 A_1AE，$AE\subset$ 平面 A_1AE，

所以 $DE\perp$ 平面 A_1AE. ………………………… 7 分

解：(2)据(1)求解知，$S_{\triangle A_1AE}=\frac{1}{2}\times AE\times AA_1=\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}$. ………………………… 8 分

因为 E，F 分别为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BC，B_1C_1 的中点，

所以 $EF\parallel AA_1$，

所以 $DE\perp$ 平面 A_1EF. ………………………… 9 分

又 $S_{\triangle A_1EF}=S_{\triangle A_1AE}$， ………………………… 10 分

所以 $V_{三棱锥F-A_1DE}=V_{三棱锥D-A_1EF}$ ………………………… 11 分

$=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1EF}\times DE$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 12 分

19. 解：(1)据题意，得 $0.015\times10+a\times10+0.025\times10+0.015\times10+0.010\times10=1$， ………………………… 2 分

解得 $a=0.035$. ………………………… 4 分

(2)据题意，得 1 000 人中年龄(单位：岁)范围在$[20,30)$中有 $1\ 000\times0.015\times10=150$(人)； ………… 5 分

1 000 人中年龄(单位：岁)范围在$[30,40)$中有 $1\ 000\times0.035\times10=350$(人). ………………………… 6 分

又因为 $150:350=3:7$，所以抽取的 10 人中有 3 人来自范围$[20,30)$，7 人来自范围$[30,40)$， ………… 7 分

所以从被抽取的 10 人中再随机抽取 2 人，这两人来自不同组共有 21 种方法， ………………………… 9 分

从被抽取的 10 人中再随机抽取 2 人，共有方法 $m=9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$(种)， ………… 11 分

所以所求概率 $p=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$. ………………………… 12 分

20. 解：(1)据题意，得 $\frac{p}{2}=\frac{1}{4}$，$\therefore p=\frac{1}{2}$， ………………………… 2 分

$\therefore$ 所求抛物线 C 的标准方程为 $y^2=x$. ………………………… 4 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则线段 MN 中点的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

又抛物线 C 的准线方程为 $x=-\frac{1}{4}$，

$\therefore$ 线段 MN 中点到 y 轴距离 $d=\frac{x_1+x_2}{2}$

$=\frac{x_1+\frac{1}{4}+x_2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2}$

$=\frac{x_1+\frac{1}{4}+x_2+\frac{1}{4}}{2}-\frac{1}{4}$

$$=\frac{|MF|+|NF|}{2}-\frac{1}{4}.$$ ………………………… 6 分

又 $|MF|+|NF|\geqslant|MN|$，当且仅当 M,N,F 三点共线时等号成立，$|MN|=4$，

$\therefore d_{\min}=\frac{4}{2}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$，此时直线 MN 过焦点 F. ………………………… 8 分

令直线 MN 方程为 $x=my+\frac{1}{4}$.

据 $\begin{cases}x=my+\frac{1}{4},\\ y^2=x,\end{cases}$ 得 $x^2-\left(m^2+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{16}=0$，

$\therefore x_1+x_2=m^2+\frac{1}{2}$， ………………………… 9 分

$\therefore |MN|=x_1+x_2+p=m^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$，

$\therefore m=-\sqrt{3}$ 或 $m=\sqrt{3}$， ………………………… 11 分

$\therefore$ 所求直线方程为 $x+\sqrt{3}y-\frac{1}{4}=0$ 或 $x-\sqrt{3}y-\frac{1}{4}=0$. ………………………… 12 分

21. 解：(1) 当 $t=2$ 时，$f(x)=-\ln x+2x-2$， ………………………… 1 分

$\therefore f'(x)=-\frac{1}{x}+2=\frac{2x-1}{x}$. ………………………… 2 分

又 $x>0$，

$\therefore$ 由 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$，由 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$， ………………………… 3 分

$\therefore$ 当 $t=2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，单调递增区间为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ ………………………… 4 分

(2) 当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-\ln x+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$.

又 $\because \frac{2k-x}{x}-2f(x)<0$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 成立，

$\therefore \frac{2k-x}{x}-2\left(-\ln x+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)<0$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 成立

$\therefore k<\frac{1}{2}x^2-x\ln x$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 成立. ………………………… 6 分

引入函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x\ln x\ (x>2)$，$\therefore g'(x)=x-\ln x-1$. ………………………… 7 分

令 $h(x)=x-\ln x-1\ (x>2)$，

$\therefore h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. ………………………… 8 分

又当 $x=2$ 时，$x-\ln x-1>0$，

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$h(x)>0$，

$\therefore g'(x)>0$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 成立. ………………………… 9 分

$\therefore g(x)$在区间$(2,+\infty)$上单调递增. ………………………………………………… 10分

又当$x=2$时,$\frac{1}{2}x^2-x\ln x=2-2\ln 2$,

$\therefore$当$x>2$时,$g(x)>2-2\ln 2$, ………………………………………………… 11分

$\therefore k\leqslant 2-2\ln 2$. 即所求实数$k$的最大值为$2-2\ln 2$. ………………………………… 12分

22. 解:(1)直线l的直角坐标方程是$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$. ……………………………………… 2分

$\because \rho^2=\frac{4}{1+\cos^2\theta}$,

$\therefore \rho^2+\rho^2\cos^2\theta=4$, ………………………………………………………… 3分

$\therefore x^2+y^2+x^2=4$, ……………………………………………………………… 4分

$\therefore \frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$. 即曲线$C$的直角坐标方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$. ………………………… 5分

(2)分析知,点$P(-1,0)$在直线l上. ………………………………………………… 6分

将$\begin{cases} x=-1+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$代入$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$并化简,得$5t^2-8t-8=0$. ……………………………… 8分

据t的几何意义可知,$|PM|\cdot|PN|=\left|\frac{-8}{5}\right|=\frac{8}{5}$. ……………………………………… 10分

23. 解:(1)据实数绝对值的几何意义知,“$|x+2\ 019|$”表示数轴上代表数x的点到代表数$-2\ 019$的点之间的距离, ……………………………………………………………………………… 1分

“$|x-2\ 019|$”表示数轴上代表数x的点到代表数$2\ 019$的点之间的距离, ………………………… 2分

所以“$|x+2\ 019|+|x-2\ 019|$”表示数轴上代表数x的点分别到代表数$-2\ 019$,$2\ 019$点的距离的和,
……………………………………………………………………………………………… 3分

所以$(|x+2\ 019|+|x-2\ 019|)_{\min}=2\ 019\times 2=4\ 038$. ……………………………………… 5分

(2)据题意知,存在$x\in\mathbf{R}$使$|x+a|+|x-2\ 019|\leqslant 3$成立.

又因为$(|x+a|+|x-2\ 019|)_{\min}=|2\ 019+a|$, ………………………………………………… 7分

所以$|2\ 019+a|\leqslant 3$, ……………………………………………………………… 8分

所以$-3\leqslant a+2\ 019\leqslant 3$, ………………………………………………………… 9分

所以$-2\ 022\leqslant a\leqslant -2\ 016$. 即所求实数$a$的取值范围是$[-2\ 022,-2\ 016]$. ……………………… 10分