

成都七中高 2024 届高三上入学考试数学试题 理科

一、单选题

CACAD CDBBA AB

二、填空题

13. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x - x - 1 > 0$ 14. $\frac{6}{7}$ 15. 4 16. 1

三、解答题

17. 【答案】(1) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

【详解】(1) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1F} - \overrightarrow{D_1E} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{D_1B} - \frac{3}{4}\overrightarrow{D_1A} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$;

(2) 设 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}$ (λ, μ 不为 0),

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{D_1G} - \overrightarrow{D_1E} = k\overrightarrow{D_1C} - k\overrightarrow{D_1A} = k\overrightarrow{AC}$$

$$= k(\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}) = k\lambda\overrightarrow{AB} + k\mu\overrightarrow{AD} = k\lambda(\overrightarrow{D_1B} - \overrightarrow{D_1A}) + \mu k(\overrightarrow{D_1D} - \overrightarrow{D_1A})$$

$$= \lambda(\overrightarrow{D_1F} - \overrightarrow{D_1E}) + \mu(\overrightarrow{D_1H} - \overrightarrow{D_1E}) = \lambda\overrightarrow{EF} + \mu\overrightarrow{EH}$$

则 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EH}$ 共面且有公共点 E , 则 E, F, G, H 四点共面;

18. 【答案】(1) $p = q = 0.3$ (2) 分布列见解析; 期望为 7.4

【详解】(1) 解: 分别记“甲租用时间不超过 30 钟、30~40 分钟、40~50 分钟”为事件 A_1, A_2, A_3 , 它们彼此互斥, 则 $P(A_1) = 0.4, P(A_2) = p, P(A_3) = q$, 且 $p + q = 0.6$ ①;

分别记“乙租用时间不超过 30 钟、30~40 分钟、40~50 分钟”为事件 B_1, B_2, B_3 , 则

$P(B_1) = 0.5, P(B_2) = 0.2, P(B_3) = 0.3$, 且 A_1, A_2, A_3 与 B_1, B_2, B_3 相互独立.

记“甲、乙租用时间相同”为事件 C ,

$$\text{则 } P(C) = P(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) = P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) + P(A_3)P(B_3)$$

$$= 0.4 \times 0.5 + 0.2p + 0.3q = 0.35 \Rightarrow 2p + 3q = 1.5$$
②

由①②解得: $p = q = 0.3$

(2) 解: X 可能取值为 4, 6, 8, 10, 12,

$$P(X=4) = 0.4 \times 0.5 = 0.2, \quad P(X=6) = 0.4 \times 0.2 + 0.3 \times 0.5 = 0.23,$$

$$P(X=8) = 0.4 \times 0.3 + 0.5 \times 0.3 + 0.3 \times 0.2 = 0.33,$$

$$P(X=10) = 0.3 \times 0.3 + 0.3 \times 0.2 = 0.15, \quad P(X=12) = 0.3 \times 0.3 = 0.09$$

所以 X 的分布表如下:

X	4	6	8	10	12
P	0.2	0.23	0.33	0.15	0.09

所以 $E(X) = 4 \times 0.2 + 6 \times 0.23 + 8 \times 0.33 + 10 \times 0.15 + 12 \times 0.09 = 7.4$

19. 【答案】(1) $a_n = n$ (2) $a_1 \geq 2$

【详解】(1) 由题意得 $\left\{ \frac{S_n}{a_n} \right\}$ 为公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列,

则 $\frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2}$, 即 $2S_n = (n+1)a_n, 2S_{n-1} = na_{n-1} (n \geq 2)$,

两式作差得 $2a_n = (n+1)a_n - na_{n-1}$ 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1} (n \geq 2)$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \times \cdots \times \frac{a_2}{a_1} = \frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n-2} \times \cdots \times \frac{2}{1}$,

即 $\frac{a_n}{a_1} = n, a_n = n (n \geq 2)$, 因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = n$.

(2) 由题知, $S_n = \frac{(a_1 + na_1) \cdot n}{2}$, 所以 $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{a_1} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2}{a_1} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

则 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} = \frac{2}{a_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2}{a_1} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2}{a_1} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$,

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\frac{2}{a_1} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \rightarrow \frac{2}{a_1}$,

因为 $a_1 > 0$, 所以 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} < 1$ 恒成立等价于 $\frac{2}{a_1} \leq 1$, 从而 $a_1 \geq 2$.

20. 【答案】(1) $a = \frac{1}{1-\ln 2}$ (2) $[2\ln 2 - 3, +\infty)$

【详解】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

由 $f(x) = a \ln x - ax + 1$, 得 $f'(x) = \frac{a}{x} - a$, 则 $f'(2) = \frac{a}{2} - a = -\frac{a}{2}$,

因为经过点 $(0, 0)$ 的直线与函数 $f(x)$ 的图像相切于点 $(2, f(2))$, 所以 $k = \frac{f(2)}{2} = -\frac{a}{2}$,

所以 $a \ln 2 - 2a + 1 = -a$, 解得 $a = \frac{1}{1-\ln 2}$,

(2) $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - 1 = a \ln x - ax + \frac{1}{2}x^2$, 则 $g'(x) = \frac{a}{x} - a + x = \frac{x^2 - ax + a}{x} (x > 0)$,

因为 $g(x)$ 有两个极值点为 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 所以 $g'(x) = \frac{x^2 - ax + a}{x} = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的根,

此时方程 $x^2 - ax + a = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的根,

则 $\Delta = a^2 - 4a > 0$, 且 $x_1 + x_2 = a > 0, x_1 x_2 = a > 0$, 解得 $a > 4$,

若不等式 $g(x_1) + g(x_2) < \lambda(x_1 + x_2)$ 恒成立, 则 $\lambda > \frac{g(x_1) + g(x_2)}{x_1 + x_2}$ 恒成立,

因为 $g(x_1) + g(x_2) = a(\ln x_1 - x_1) + \frac{1}{2}x_1^2 + a(\ln x_2 - x_2) + \frac{1}{2}x_2^2 = a \ln(x_1 x_2) - a(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$$= a \ln(x_1 x_2) - a(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = a \ln a - \frac{1}{2}a^2 - a$$

不妨设 $h(a) = \frac{g(x_1) + g(x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{a \ln a - \frac{1}{2}a^2 - a}{a} = \ln a - \frac{1}{2}a - 1 (a > 4)$,

则 $h'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} = \frac{2-a}{2a}$, 因为 $a > 4$, 所以 $h'(a) < 0$,

所以 $h(a)$ 在 $(4, +\infty)$ 上递减, 所以 $h(a) < h(4) = 2 \ln 2 - 3$, 所以 $\lambda \geq 2 \ln 2 - 3$,

即实数 λ 的取值范围为 $[2 \ln 2 - 3, +\infty)$.

21. 【答案】(1) $E: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ (2) 直线 AD 过定点 $(-\frac{4}{3}, 0)$

【详解】(1) 设 $F(-c, 0)$, 由 $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, 则 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 2$, 即 $a = b$, 所以渐近线方程为 $y = \pm x$.

又 F 到双曲线 E 的渐近线的距离为 $\sqrt{2}$, 则 $\frac{c}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

即 $c = 2$, $a = b = \sqrt{2}$. 所以双曲线方程为 $E: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 设 $B(x_0, y_0)$, $C(-x_0, -y_0)$, 直线 FB 的方程为 $x = \frac{x_0 + 2}{y_0}y - 2$,

直线 FB 的方程与双曲线 $E: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 联立,

$$\left(\frac{(x_0 + 2)^2}{y_0^2} - 1 \right) y^2 - \frac{4(x_0 + 2)}{y_0} y + 2 = 0.$$

又 $x_0^2 - y_0^2 = 2$, 则 $(2x_0 + 3)y^2 - 2(x_0 + 2)y_0 y + y_0^2 = 0$

所以 $y_0 y_A = \frac{y_0^2}{2x_0 + 3}$, 即 $y_A = \frac{y_0}{2x_0 + 3}$, $x_A = \frac{-3x_0 - 4}{2x_0 + 3}$. 同理 $y_D = \frac{-y_0}{-2x_0 + 3}$, $x_D = \frac{3x_0 - 4}{-2x_0 + 3}$,

$$\text{则 } k_{AD} = \frac{\frac{y_0}{2x_0 + 3} - \frac{-y_0}{-2x_0 + 3}}{\frac{-3x_0 - 4}{2x_0 + 3} - \frac{3x_0 - 4}{-2x_0 + 3}} = \frac{y_0(-2x_0 + 3) + y_0(2x_0 + 3)}{(-3x_0 - 4)(-2x_0 + 3) - (3x_0 - 4)(2x_0 + 3)} = -\frac{3y_0}{x_0},$$

则直线 AD 方程为 $y - \frac{y_0}{2x_0 + 3} = -3 \frac{y_0}{x_0} \left(x - \frac{-3x_0 - 4}{2x_0 + 3} \right)$,

令 $y = 0$, 则 $\frac{1}{2x_0 + 3} = \frac{3}{x_0} \left(x - \frac{-3x_0 - 4}{2x_0 + 3} \right)$, 即 $x = \frac{x_0}{3(2x_0 + 3)} + \frac{-3x_0 - 4}{2x_0 + 3} = \frac{-4(2x_0 + 3)}{3(2x_0 + 3)} = -\frac{4}{3}$

所以直线 AD 过定点 $(-\frac{4}{3}, 0)$.

22. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1 (x \neq -2)$;

当 $\cos \alpha \neq 0$ 时, 直线 l 的直角坐标方程为 $y = x \tan \alpha + 2 + \tan \alpha$,

当 $\cos \alpha = 0$ 时, 直线 l 的参数方程为 $x = -1$.

(2) 45°

【详解】(1) 由 $\begin{cases} x = \frac{2-2s^2}{1+s^2}, \\ y = \frac{4\sqrt{2}s}{1+s^2}. \end{cases}$ 得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = \frac{(1-s^2)^2}{(1+s^2)^2} + \frac{(2s)^2}{(1+s^2)^2} = 1$, 而 $x = \frac{4}{1+s^2} - 2 > -2$,

即曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1 (x \neq -2)$,

由 $\begin{cases} x = -1 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数),

当 $\cos \alpha \neq 0$ 时, 消去参数 t , 可得直线 l 的直角坐标方程为 $y = x \tan \alpha + 2 + \tan \alpha$,

当 $\cos \alpha = 0$ 时, 可得直线 l 的参数方程为 $x = -1$.

(2) 将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程,

整理可得: $(1 + \cos^2 \alpha)t^2 + 4(\sin \alpha - \cos \alpha)t - 2 = 0$. ①

\because 曲线 C 截直线 l 所得线段的中点 $(-1, 2)$ 在椭圆内, 则方程①有两解, 设为 t_1, t_2 ,

则 $t_1 + t_2 = \frac{4 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = 0$, 故 $\cos \alpha - \sin \alpha = 0$, 解得 $\tan \alpha = 1$. $\therefore l$ 的倾斜角 α 为 45° .

23. 【答案】(1) 3 (2) $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

【详解】(1) $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $a^3 + b^3 + 1^3 \geq 3a \cdot b \cdot 1 = 3ab$,

$b^3 + c^3 + 1^3 \geq 3b \cdot c \cdot 1 = 3bc$, $c^3 + a^3 + 1^3 \geq 3c \cdot a \cdot 1 = 3ca$,

则 $2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \times 1^3 \geq 3(ab + bc + ca) = 9$, 所以 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3$,

当且仅当 $a = b = c = 1$ 时等号成立, $a^3 + b^3 + c^3$ 的最小值为 $M = 3$.

(2) $|x - m| - |x + 1| \leq |(x - m) - (x + 1)| \leq |m + 1|$,

当且仅当 $(x - m)(x + 1) \geq 0$ 且 $|x - m| \geq |x + 1|$ 时取最大值 $|m + 1|$.

$y = |x - m| - |x + 1|$ 的最大值为 $|m + 1| > 3$, 解得 $m \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线四川官方微信号**：**scgkjzq**。

