

高二数学参考答案

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	B	C	C	A	B

8. 解：由 $e^x \geq x+1$ 知 $a = \sqrt{e} - 1 > \frac{1}{2}$ ，由 $\ln(1+x) \cdot x$ 知 $b = \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$ ，由 $\sin x \cdot x$ 知 $c = \sin \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ ，

则 $a > b$ ， $a > c$ 。下面比较 b 和 c 的大小：

法 1：设 $f(x) = \ln(1+x) - \sin x$ ， $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ， $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \cos x = \frac{1 - \cos x - x \cos x}{1+x}$ ，

设 $g(x) = 1 - \cos x - x \cos x$ ， $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ， $g'(x) = \sin x - (\cos x - x \sin x) = (x+1) \sin x - \cos x$ ，

易知 $g'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上单调递增，则 $g'(x) < g'(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上

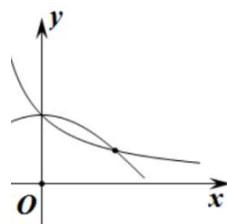
单调递减， $g(x) < g(0) = 0$ ，即 $f'(x) < 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上恒成立，则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上单调递减，由

$\frac{1}{2} \in (0, \frac{\pi}{6})$ ，则 $f(\frac{1}{2}) < f(0) = 0$ ，即 $\ln \frac{3}{2} < \sin \frac{1}{2}$ ，则 $b < c$ ，故选 B。

法 2：设 $f(x) = \ln(1+x) - \sin x$ ， $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ， $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \cos x$ ，在同一直角坐标系下作出

函数 $y = \frac{1}{1+x}$ 和 $y = \cos x$ 的简图，如图所示。

$x = \frac{\pi}{6}$ 时， $\frac{1}{1+\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{\pi+6} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即 $f'(x) < 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上恒成立，后同法 1。



法 3：泰勒展开式 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$\ln \frac{3}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{5}{12}$ ， $\sin \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48}$ ，由 $\frac{5}{12} = \frac{20}{48} < \frac{23}{48}$ 知 $b < c$ ，故选 B。

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	BCD	AC	AB	BCD

12. 解：在平面中，若 $PA + PC = \sqrt{10} > 2\sqrt{2} = AC$ ，点 P 的轨迹是以 A ， C 为焦点的椭圆，其中

$a = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ， $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，那么在空间中，点 P 的轨迹为椭球面（点 P 不在平面 ABC 上）。

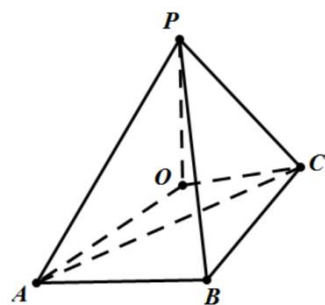
$V_{\max} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，A 错误。当过点 P 的直线与圆 $x^2 + y^2 = b^2 = \frac{1}{2}$ 相切时， α 取最大值，

此时 $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 且 α 为锐角, 所以 α 的最大值为 30° , B 正确.

若 $\alpha = 90^\circ$, 则 $PB \perp$ 平面 ABC , 因 $AB = BC$, 则直线 PA , PC 与平面 ABC 所成的角相等, 不合题意, C 正确. 对于选项 D, 作 $PO \perp$ 平面 ABC , O 为垂足, 则 $\angle PAO = 30^\circ$, $\angle PCO = 60^\circ$, 设 $PO = h > 0$, 则 $AO = \sqrt{3}h$,

$CO = \frac{\sqrt{3}}{3}h$, 由 $AO + CO \leq AC$ 知 $\frac{4\sqrt{3}}{3}h \leq 2\sqrt{2}$, 即 $h \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则

$V_{\min} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, D 正确, 答案为 BCD.



三、填空题

13. $\frac{13}{250}$ (备注: 0.052 也可以)

14. 60

15. $y = \pm\sqrt{3}x$ (2 分), $\frac{1}{2}$ (3 分)

16. 2

16. 法 1: 不等式可化为 $xe^x + 1 > a(e^x - 1)$, 由 $x > 0$, 知 $e^x > 1$, 则 $x > 0$ 时, $a < \frac{xe^x + 1}{e^x - 1}$ 恒成立.

设 $f(x) = \frac{xe^x + 1}{e^x - 1}$, $x > 0$, $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x - 2)}{(e^x - 1)^2}$, 设 $g(x) = e^x - x - 2$, $x > 0$,

$g'(x) = e^x - 1 > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(1) = e - 3 < 0$, $g(2) = e^2 - 4 > 0$, 则 $g(x)$

在 $(1, 2)$ 上存在唯一的零点 x_0 , 当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > x_0$ 时,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(x_0) = \frac{x_0 e^{x_0} + 1}{e^{x_0} - 1}$, 且 $e^{x_0} = x_0 + 2$, 化简得

$f(x_0) = x_0 + 1$, 因 $1 < x_0 < 2$, 则 $2 < f(x_0) < 3$, 则整数 a 的最大值为 2.

法 2: 设 $h(x) = (x - a)e^x + a + 1$, $x > 0$, $h'(x) = (x - a + 1)e^x$, 直接考虑 $a - 1 > 0$ 的情形,

由 $h'(x) > 0$ 得 $x > a - 1$, 则 $h(x)$ 在 $(0, a - 1)$ 上单调递减, 在 $(a - 1, +\infty)$ 上单调递增,

则 $h(x)_{\min} = h(a - 1) = -e^{a-1} + a + 1 > 0$, 令 $A(a) = -e^{a-1} + a + 1$, $a > 1$, $A'(a) = -e^{a-1} + 1 < 0$,

则 $A(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $A(2) = 3 - e > 0$, $A(3) = 4 - e^2 < 0$, 则整数 a 的最大值为 2.

法 3: 特殊值法, 取 $a = 1, 2, 3$, 过程略.

四、解答题

17. 解: (I) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $\frac{16}{q} + 4q = 16$,2 分

即 $q^2 - 4q + 4 = 0$, 则 $q = 2$, $a_1 = 2$ 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$5 分

或: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $\begin{cases} a_1 q = 4 \\ 4a_1 + a_1 q^2 = 16 \end{cases}$,2 分

解得 $q = 2$, $a_1 = 2$ 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$5 分

(II) $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^n = n$ 6 分

则 $\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 8 分

所以 $S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$10 分

18. 解: (I) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x < -\frac{2}{3}$ 或 $x > 2$ 3 分

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{2}{3})$, $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\frac{2}{3}, 2)$ 上单调递减.5 分

(II) 依题知, $f'(x) = 3x^2 - 4x + a$ 在 $(\frac{1}{3}, 3)$ 上有变号零点7 分

由 $3x^2 - 4x + a = 0$, 得 $a = 4x - 3x^2$, 令 $g(x) = 4x - 3x^2 = x(4 - 3x)$ 8 分

$g(x)$ 在 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 上单调递增, 在 $(\frac{2}{3}, 3)$ 上单调递减9 分

且 $g(\frac{1}{3}) = 1$, $g(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$, $g(3) = -15$

则 $-15 < a < \frac{4}{3}$12 分

或: 依题知, $f'(x) = 3x^2 - 4x + a$ 在 $(\frac{1}{3}, 3)$ 上有变号零点7 分

借助函数图象可知 $\begin{cases} \Delta = 16 - 12a > 0 \\ f'(3) = 27 - 12 + a > 0 \end{cases}$, 解得 $-15 < a < \frac{4}{3}$12 分

19. 解: (I) 在图 1 中, $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$, 由 $\angle DCB = 120^\circ$ 知

$\angle ACB = 90^\circ$ ，即 $BC \perp AC$ 2 分

在图 2 中，由 $BC \perp AC$ ， $BC \perp AD$ ， $AC \cap AD = A$ ，知 $BC \perp$ 平面 ACD

由 $BC \subset$ 平面 ABC ，得平面 $ACD \perp$ 平面 ABC 。4 分

或：在 $\triangle ACD$ 中， $AD = CD = 2$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ，由余弦定理得 $AC = 2\sqrt{3}$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理知 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin \angle BAC}$ ， $\sin \angle BAC = \frac{1}{2}$ ，且 $\angle BAC$ 为锐角，

则 $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，即 $BC \perp AC$ 2 分

下同法 1（略）

（II）以 C 为原点， CA, CB 所在直线为 x, y 轴，过 C 且垂直于底面所在直线为 z 轴，建系

则 $B(0, 2, 0), D(\sqrt{3}, 0, 1), A(2\sqrt{3}, 0, 0)$ ，设

$\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD} = (\sqrt{3}\lambda, -2\lambda, \lambda), \lambda \in [0, 1]$ ，则

$E(\sqrt{3}\lambda, -2\lambda + 2, \lambda)$

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

则有 $\begin{cases} \overrightarrow{CA} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{CE} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} 2\sqrt{3}x = 0 \\ \sqrt{3}\lambda x + (-2\lambda + 2)y + \lambda z = 0 \end{cases}$ ，

则 $x = 0$ ，令 $y = \lambda, z = 2\lambda - 2$ ，所以 $\vec{n} = (0, \lambda, 2\lambda - 2)$ 8 分

同理可得平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{m} = (-1, 0, \sqrt{3})$ 10 分

$$\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{|\sqrt{3}(2\lambda - 2)|}{2\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda - 2)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

解得 $\lambda = \frac{2}{3}$ 或 $\lambda = 2$ （舍），则存在这样的点 E ，且 $\frac{BE}{BD} = \frac{2}{3}$ 。12 分

20. 解：（I）整理得到如下列联表：1 分

性别	篮球运动		合计
	热爱	不热爱	
男生	3n	n	4n
女生	2n	2n	4n
合计	5n	3n	8n

$$\text{则 } \chi^2 = \frac{8n(6n^2 - 2n^2)^2}{4n \cdot 4n \cdot 5n \cdot 3n} = \frac{8}{15}n \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由 } 3.841 \cdot \frac{8}{15}n < 6.635 \text{ 解得 } 7.2 \cdot n < 12.4, \text{ 则 } n = 8, 9, 10, 11, 12 \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

故男生人数可能为 32、36、40、44、48. \dots\dots 6 \text{ 分}

(II) 由 (I) 知, 共调查 64 人, 热爱篮球运动的男生、女生各有 24 人、16 人 \dots\dots 7 \text{ 分}

参加志愿活动的 10 人中, 男生有 6 人, 女生有 4 人 \dots\dots 8 \text{ 分}

由题意知 X 服从超几何分布 \dots\dots 9 \text{ 分}

$$\text{概率分布为 } P(X=k) = \frac{C_4^k C_6^{4-k}}{C_{10}^4}, \quad k=0,1,2,3,4 \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{均值 } E(X) = 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

(II) 中概率分布的另外形式: X 可取 0, 1, 2, 3, 4

$$P(X=0) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14} \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^3}{C_{10}^4} = \frac{8}{21} \quad P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 C_6^1}{C_{10}^4} = \frac{4}{35} \quad P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

$$E(X) = \frac{8}{21} + \frac{6}{7} + \frac{12}{35} + \frac{4}{210} = \frac{336}{210} = \frac{8}{5}$$

$$21. \text{ 解: (I) 由题知准线方程为 } y = -\frac{p}{2}, \text{ 则 } 4 + \frac{p}{2} = \frac{17}{4}, \text{ 得 } p = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

(II) 抛物线的方程为 $x^2 = y$, 点 P 的坐标为 $(-2, 4)$, 依题知过点 P 的直线斜率必存在

$$\text{设过点 } P \text{ 的直线方程为 } y - 4 = k(x + 2), \text{ 圆心到该直线的距离为 } \frac{|-2 + 2k + 4|}{\sqrt{1+k^2}} \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{由直线与圆相切, 所以 } \frac{|-2 + 2k + 4|}{\sqrt{1+k^2}} = 1, \text{ 解得 } k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3} \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 = y \\ y - 4 = k(x + 2) \end{cases}, \text{ 消 } y \text{ 得 } x^2 - kx - 2k - 4 = 0, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

不妨设 $x_1 = k_1 + 2 = \frac{-4 + \sqrt{7}}{3} + 2 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$, $x_2 = k_2 + 2 = \frac{-4 - \sqrt{7}}{3} + 2 = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ 8 分

故 $A(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}, \frac{11 + 4\sqrt{7}}{9})$, $B(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{11 - 4\sqrt{7}}{9})$, 得 $k_{AB} = \frac{\frac{11 + 4\sqrt{7}}{9} - \frac{11 - 4\sqrt{7}}{9}}{\frac{2 + \sqrt{7}}{3} - \frac{2 - \sqrt{7}}{3}} = \frac{4}{3}$,

所以直线 $AB: y - \frac{11 + 4\sqrt{7}}{9} = \frac{4}{3}(x - \frac{2 + \sqrt{7}}{3})$, 即 $4x - 3y + 1 = 0$ 10 分

圆心 M 到直线的距离为 $d = \frac{|-6 + 1|}{5} = 1$, $|AB| = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} |x_A - x_B| = \frac{10\sqrt{7}}{9}$

所以 $S_{\max} = \frac{1}{2} \times \frac{10\sqrt{7}}{9} \times 2 = \frac{10\sqrt{7}}{9}$12 分

(II) 另解: 易知 $P(-2, 4)$, 设 $A(x_1, x_1^2)$, $B(x_2, x_2^2)$, $k_{AB} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$,

则直线 AB 的方程为 $y - x_1^2 = (x_1 + x_2)(x - x_1)$, 即 $(x_1 + x_2)x - y - x_1x_2 = 0$,6 分

同理, 直线 PA 的方程为 $(x_1 - 2)x - y + 2x_1 = 0$

直线 PB 的方程为 $(x_2 - 2)x - y + 2x_2 = 0$ 7 分

则 $\frac{|2x_1 - 2|}{\sqrt{(x_1 - 2)^2 + 1}} = \frac{|2x_2 - 2|}{\sqrt{(x_2 - 2)^2 + 1}} = 1$, 即 x_1 和 x_2 是方程 $3x^2 - 4x - 1 = 0$ 的两个根,9 分

则 $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$, $x_1x_2 = -\frac{1}{3}$, 所以直线 AB 的方程为 $4x - 3y + 1 = 0$ 10 分

圆心 M 到直线 AB 的距离为 $d = \frac{|-6 + 1|}{5} = 1$

此时 $|AB| = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} |x_1 - x_2| = \frac{5}{3} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{5}{3} \times \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{10\sqrt{7}}{9}$

所以 $S_{\max} = \frac{1}{2} \times \frac{10\sqrt{7}}{9} \times 2 = \frac{10\sqrt{7}}{9}$12 分

22. 解: (I) $f'(x) = \frac{e^x \cdot ax - e^x \cdot a}{(ax)^2} = \frac{e^x(ax - a)}{(ax)^2}$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$

$g'(x) = \frac{a \ln x - a}{(\ln x)^2}$, 令 $g'(x) = 0$ 得 $x = e$ 2 分

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(1) = \frac{e}{a}$

$g(x)$ 在 $(1,e)$ 单调递减, 在 $(e,+\infty)$ 单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(e) = ae$

由 $\frac{e}{a} = ae$, 得 $a = 1$ 4 分

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 单调递减, 无最小值, 不合题意

综上所述, $a = 1$5 分

(II) 由 (I) 知, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 单调递增, $g(x)$ 在 $(1,e)$ 单调递减, 在 $(e,+\infty)$

单调递增, $g(x)_{\min} = e$, 则直线 $y = b$ 与 $f(x)$ 、 $g(x)$ 最多有 4 个交点.

当 $x \in (1,e)$ 时, 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增, 当 $x \rightarrow 1$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$,

$h(e) = \frac{e^e - e^2}{e} > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 上有唯一的零点 x_0 , 即存在 $x_0 \in (1,e)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$,

取 $b = f(x_0) = g(x_0)$ 满足题意, 使得直线 $y = b$ 与 $f(x)$ 、 $g(x)$ 恰有三个交点,7 分

分别记为 $A(x_1, b)$, $B(x_0, b)$, $C(x_2, b)$, 不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_0 < e < x_2$, 由 $f(x_0) = g(x_0)$ 得

$\frac{e^{x_0}}{x_0} = \frac{x_0}{\ln x_0}$, 即 $x_0^2 = e^{x_0} \ln x_0$. 要证 $x_0^2 = x_1 x_2$, 即证 $x_1 x_2 = e^{x_0} \ln x_0$

而 $b = f(x_1) = f(x_0) = g(x_0) = g(x_2)$, 即 $b = \frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{x_0}}{x_0} = \frac{x_0}{\ln x_0} = \frac{x_2}{\ln x_2}$ 8 分

由 $\frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{x_0}{\ln x_0}$ 得 $\frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{\ln x_0}}{\ln x_0}$, 即 $f(x_1) = f(\ln x_0)$, 又 $x_0 \in (1,e)$, $\ln x_0 \in (0,1)$, $x_1 \in (0,1)$,

而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调, 所以 $x_1 = \ln x_0$10 分

又由 $\frac{e^{x_0}}{x_0} = \frac{x_2}{\ln x_2}$ 得 $\frac{e^{x_0}}{\ln e^{x_0}} = \frac{x_2}{\ln x_2}$, 即 $g(e^{x_0}) = g(x_2)$, 又 $x_2 \in (e,+\infty)$, $e^{x_0} \in (e,+\infty)$,

而 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 单调, 所以 $e^{x_0} = x_2$.

由 $x_1 = \ln x_0$, $e^{x_0} = x_2$ 得 $x_1 x_2 = e^{x_0} \ln x_0 = x_0^2$, 原命题得证.12 分