2022 学年第二学期浙江省名校协作体试题

高三年级数学学科 参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	D	D	A	C	C

8. 解析：令 $i=j$，则 $f(j+1,j)=0$，故 A 错；

$\dfrac{f(i+1,j)}{f(i,j)}=\dfrac{j-i}{i+1}$，所以 $\dfrac{f(i,j)}{f(1,j)}=\prod\limits_{k=1}^{i-1}\dfrac{j-k}{k+1}=\dfrac{1}{j}C_j^i$，又 $f(1,j)=1$，

所以 $f(i,j)=\dfrac{1}{j}C_j^i$，$i\le j$，当 $i=1$ 时也符合上式，故 B 错；

$\sum\limits_{i=1}^{j}j^2f(i,j)=j\sum\limits_{i=1}^{j}C_j^i=j(2^j-1)$，故 C 对；

$\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}j\cdot f(i,j)=\sum\limits_{j=1}^{n}(2^j-1)=2^{n+1}-2-n$，故 D 错.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	BC	ACD	ABD	BCD

11. 解析：设 G,H,O_2 分别为 BC,AB,AQ 的中点，O_1 为 ΔABC 的中心

$\because S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，$S_{表}=\sqrt{3}+\sqrt{7}$，$\therefore S_{\Delta COB}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，$OG=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，$\therefore OB=\sqrt{\dfrac{7}{9}+1}=\dfrac{4}{3}$,故 A 对；

$\because V=\dfrac{1}{3}S_{表}r$，$\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\cdot r$，$\therefore r=\dfrac{\sqrt{21}-3}{6}$，故 B 对；

$\because \overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=QH^2-BH^2=QH^2-1,\because QH\in\left[\dfrac{4}{3}-\dfrac{\sqrt{7}}{3},\dfrac{4}{3}+\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right]$

$\therefore \overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}\in\left[\dfrac{14-8\sqrt{7}}{9},\dfrac{14+8\sqrt{7}}{9}\right]$,故 C 错； $\because QB//O_2H, AC//HG$，

$$\therefore \cos\angle O_2HG=\frac{O_2H^2+HG^2-O_2G^2}{2O_2H\cdot HG}=\frac{\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2+1-\left(\frac{\sqrt{31}}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}\cdot 1}=-\frac{3\sqrt{13}}{26},$$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{3\sqrt{13}}{26}$，故 D 对.

12. 解析：过 P 向 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 作垂线，垂足为 P_1，过 P 向 x 轴作垂线，垂足为 P_2，

设直线 $PK: x=ty+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，不妨设 $t>0$， $\begin{cases}x=ty+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x^2-y^2=1\end{cases}$，消 y，$\therefore (t^2-1)y^2+\sqrt{2}ty-\dfrac{1}{2}=0$，

$\therefore \Delta=4t^2-2=0$， $\therefore t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $\therefore k=\dfrac{1}{t}=\tan\alpha=\sqrt{2}$， $\therefore \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $\therefore \cos\alpha\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故 A 错；

$\sin\beta\le\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin\alpha\Leftrightarrow|PK|\le\dfrac{\sqrt{6}}{2}|PF|$ （易得 $\dfrac{|PF|}{|PP_1|}=\sqrt{2}$） $\Leftrightarrow|PK|\le\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2}|PP_1|$

$\Leftrightarrow\dfrac{|PP_1|}{|PK|}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\cos\alpha\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 B 对；

$\tan\alpha=\sqrt{2}\sin\beta\Leftrightarrow\dfrac{|PP_2|}{|KP_2|}=\sqrt{2}\dfrac{|PP_2|}{|PF|}\Leftrightarrow|PF|=\sqrt{2}|KP_2|\Leftrightarrow\sqrt{2}|PP_1|=\sqrt{2}|KP_2|$ （显然成立），故 C 对；

$\dfrac{|KF|}{\sin\gamma}=\dfrac{|PF|}{\sin\alpha}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\sqrt{2}|PP_1|\sin\gamma\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\sqrt{2}|PP_1|\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\left(x_P-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\alpha\Leftrightarrow x_P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{4\cos\alpha}$ （已知 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\cos\alpha\le 1$）

$\Leftrightarrow x_P\in\left[\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4},\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right]$ （显然成立），（也可用极限思想考虑）故 D 对.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 21；　　14. $\pm 5\sqrt{2}$；　　15. $\frac{15}{37}$；　　16. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$；

（注：第 14 题漏了一解扣 1 分，第 16 题闭区间写成开区间不扣分）

16. 解析：$\because f(-x)=f(x)-4x$，$\therefore f(-x)-(-x)^2-2(-x)=f(x)-x^2-2x$

令 $g(x)=f(x)-x^2-2x$，则 $g(-x)=g(x)$，$\therefore g(x)$ 是偶函数，$\because f'(x)<2x+2$，

$\therefore f'(x)-2x-2<0$，$\therefore g'(x)=f'(x)-2x-2<0$，$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$g(x)$ 递减，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$g(x)$ 递增，$\because f(m+1)\le f(-m)+6m+3$，

$\therefore f(m+1)-(m+1)^2-2(m+1)\le f(-m)-(-m)^2-2(-m)$，$\therefore g(m+1)\le g(-m)$，

$\therefore g(|m+1|)\le g(|-m|)$，$\therefore |m+1|\le|-m|$，$\therefore m\le -\frac{1}{2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（1）$\because \frac{\sin^2 A}{a}=\frac{\cos A\cdot\cos B+2\cos^2 C}{b}$，

由正弦定理，得 $\frac{\sin^2 A}{\sin A}=\frac{\cos A\cdot\cos B+2\cos^2 C}{\sin B}$，……………………2 分

$\therefore \sin A\cdot\sin B=\cos A\cdot\cos B+2\cos^2 C$，

$\therefore \cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B=-2\cos^2 C$，

$\therefore \cos(A+B)=-2\cos^2 C$，

$\therefore \cos C=2\cos^2 C$，$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$ 或 $\cos C=0$

$\because C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.　……………………5 分

（2）$\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

$\therefore 3=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$，　……………………7 分

$\therefore 3=\dfrac{27}{4}-2ab-2ab\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{27}{4}-3ab$，

$\therefore 3ab=\dfrac{27}{4}-3=\dfrac{15}{4}$，$\therefore ab=\dfrac{5}{4}$， ……………………8 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{16}$. ……………………10 分

18. （1）$\because \dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{2}{a_3}$，　　$\therefore \dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_1q}=\dfrac{2}{a_1q^2}$，

$\therefore q^2-q-2=0$，　　$\therefore q=2$ 或 $q=-1$

当 $q=-1$ 时，$S_4=0$ 不符合，舍去，

当 $q=2$ 时，$S_4=\dfrac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=\dfrac{a_1\left(1-2^4\right)}{1-2}=15a_1=30$，

$\therefore a_1=2$，　　$\therefore a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ ……………………4 分

$\because b_1+\dfrac{1}{2}b_2+\dfrac{1}{3}b_3+\cdots+\dfrac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$　　①

$\therefore b_1+\dfrac{1}{2}b_2+\dfrac{1}{3}b_3+\cdots+\dfrac{1}{n-1}b_{n-1}=b_n-1$　　②　　$n\ge 2,n\in N^*$

$\therefore$①−②　　$\dfrac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$　　$\therefore \dfrac{b_{n+1}}{n+1}=\dfrac{b_n}{n}$　　$n\ge 2,n\in N^*$

当 $n=1$ 时，$b_1=b_2-1=1$，　　$\therefore b_2=2$

$\therefore \dfrac{b_2}{2}=\dfrac{b_1}{1}=1$，　　$\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$ 是常数列

$\therefore \dfrac{b_n}{n}=1$，　　$\therefore b_n=n$ ……………………8 分

（2）$\because c_n=a_n+(-1)^n(3b_n+1)=2^n+(-1)^n(3n+1)$

$\therefore$ 当 n 为偶数时，

$T_n=\dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}+\left[(-4+7)+(-10+13)+\cdots+\left(-(3n-2)+(3n+1)\right)\right]$

$=-2+2^{n+1}+3\cdot\dfrac{n}{2}=2^{n+1}+\dfrac{3}{2}n-2$ ……………………10 分

当n为奇数时，

$$T_n=T_{n-1}+c_n=2^n+\frac{3}{2}(n-1)-2+2^n-(3n+1)=2^{n+1}-\frac{3}{2}n-\frac{9}{2}$$

……………………12 分

$$\therefore T_n=\begin{cases}2^{n+1}-\frac{3}{2}n-\frac{9}{2},\ n为奇数\\2^{n+1}+\frac{3}{2}n-2,\ n为偶数\end{cases}$$ （或$T_n=2^{n+1}+\left(\frac{3}{2}n+\frac{5}{4}\right)\cdot(-1)^n-\frac{13}{4}$）

（注：若第（2）问答案都不对，但有并项求和思想给 1 分；若第（2）问用错位相减法来做，只要有错位相减法思想就给 1 分，答案 3 分）

19. （1）$P=C_3^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1+C_3^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0=3\times\frac{9}{16}\times\frac{1}{4}+\frac{27}{64}=\frac{27}{32}$. ……………3 分

（2）设甲、乙、丙 3 位顾客大小门都射进的事件分别记为A，B，C.

由题意，$X=0$、1、2、3， ……………………4 分

$P(A)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$， ……………………5 分

$P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$， ……………………6 分

$P(C)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$， ……………………7 分

$P(X=0)=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$， ……………………8 分

$$P(X=1)=P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9+3+3}{32}=\frac{15}{32}$$

……………………9 分

$$P(X=2)=P(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3+3+1}{32}=\frac{7}{32},$$

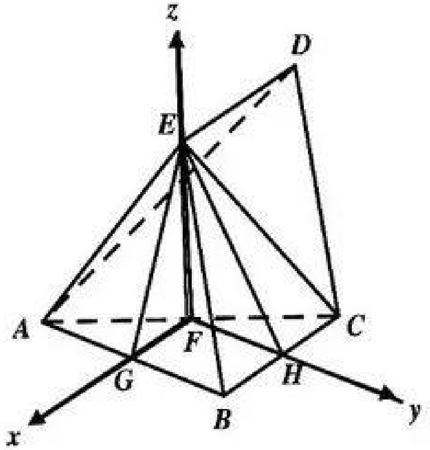
……………………10 分

$P(X=3)=P(ABC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$， ……………………11 分

X	0	1	2	3
P	$\frac{9}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{32}$

$\therefore E(X)=\frac{15}{32}+\frac{14}{32}+\frac{3}{32}=1$ ……………………12 分

20. 解：（1） $\because AB\perp BC$且$AB=8, BC=6\ \therefore AC=10$



取AB中点G，连FG, EG. 又$\because F$为AC中点，

$\because AE=BE\qquad \therefore AB\perp EG$ …………1 分

$\therefore FG//BC, \therefore FG\perp AB$ …………2 分

$\because EG\cap FG=G$

$\therefore AB\perp$面EFG, …………4 分

又$EF\subset$面EFG

$\therefore AB\perp EF$ ……………………5 分

（2） $\because EG\perp AB$，$FG\perp AB$，$EG=3\sqrt{17}$，$FG=3$，

$\therefore\angle EGF$即为二面角$E-AB-C$所对应的平面角 ……………………6 分

又$\therefore\tan\angle EGF=4, \therefore\cos\angle EGF=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

$\therefore EF=12\qquad \therefore EF\perp GF$，又$\because EF\perp AB, GF\cap AB=G$

$\therefore EF\perp$面ABC ……………………8 分

（解法一）

由图可知四棱锥中：$V_{A-BCDE}=2V_{A-BCE}=2V_{E-ABC}$ ……………………10 分

$\therefore V_{E-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot 12=96$

$\therefore V_{A-BCDE}=192$ ……………………12 分

（解法二）

由图可知：$V_{A-BCDE}=2V_{A-BCE}=2V_{E-ABC}$ ……………………10 分

又因为 A 到面 EBC 的距离等于 F 到面 EBC 的距离 FI 的两倍

取 BC 的中点 H，连接 FH，EH，故$\therefore HF\perp BC$，$EH\perp BC$

$\therefore EH=4\sqrt{10}$，$FI=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$，

$\therefore V_{F-EBC}=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 4\sqrt{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{48}{4\sqrt{10}}=48$

$\therefore V_{A-BCDE}=4V_{F-EBC}=192$ ……………………12 分

（解法三）

以 F 为坐标原点，FG 为 x 轴，FH 为 y 轴建立直角坐标系 ……………………9 分

则 $A(3,-4,0)$， $B(3,4,0)$，$C(-3,4,0)$，$E(0,0,12)$，$\therefore \overrightarrow{BE}=(-3,-4,12),\overrightarrow{BC}=(-6,0,0)$，

令面 EBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\end{cases} \text{即} \begin{cases}-3x-4y+12z=0\\ -6x=0\end{cases}$$

$\therefore \vec{n}=(0,3,1)$， ……………………10 分

$\therefore \overrightarrow{AB}=(0,8,0)$， $\therefore h_{A-EBC}=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{24}{\sqrt{10}}$

$\therefore V_{A-BCDE}=\frac{1}{3}S_{BCDE}h_{A-BCE}=\frac{1}{3}\left(6\cdot 4\sqrt{10}\right)\cdot\frac{24}{\sqrt{10}}=192$ ……………………12 分

21. （1）当 $m=1$ 时，$f(x)=e^x-\ln(x-1)+1$， $\therefore f(2)=e^2+1$ ……………………1 分

$\because f'(x)=e^x-\frac{1}{x-1}$， ……………………3 分

$\therefore f'(2)=e^2-1$ ……………………4 分

$\therefore$ 切线方程为： $y=(e^2-1)x+3-e^2$ ……………………5 分

（2）**（解法一）**

$\because f(x)=e^x-m\ln(mx-m)+m$ （$x>1$）

$\therefore f'(x)=e^x-\frac{m}{x-1}$， ……………………6 分

$\therefore f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

$\because$ 当 $x\to 1$ 时，$f'(x)\to-\infty$， 当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，

$\therefore \exists x_0\in(1,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，

即 $e^{x_0}=\dfrac{m}{x_0-1}$， $x_0=\ln m-\ln(x_0-1)$ ……………………7 分

$\therefore$ 当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x_0)<0$， 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上递增， ……………………9 分

$$\therefore f_{\min}(x)=f(x_0)=e^{x_0}-m\ln(mx_0-m)+m=\frac{m}{x_0-1}-m(2\ln m-x_0)+m$$

$$=m\left(x_0+\frac{1}{x_0-1}\right)+m-2m\ln m=m\left[(x_0-1)+\frac{1}{x_0-1}\right]+2m-2m\ln m$$

$$\geq 2m+2m-2m\ln m=4m-2m\ln m\geq 0$$

$\therefore m\in\left(0,e^{2}\right]$ ……………………12 分

（解法二）

$\because f(x)\geq 0$， $\therefore \dfrac{e^x}{m}-\ln(mx-m)+1\geq 0$ ……………………6 分

$\therefore \dfrac{e^x}{e^{\ln m}}-\ln\left[m(x-1)\right]+1\geq 0$ $\therefore e^{x-\ln m}-\ln m-\ln(x-1)+1\geq 0$

$\therefore e^{x-\ln m}+x-\ln m\geq \ln(x-1)+(x-1)$

$\therefore e^{x-\ln m}+(x-\ln m)\geq e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$ ……………………8 分

令 $g(x)=e^x+x$， $g(x)$ 单调递增 ……………………9 分

$\therefore g(x-\ln m)\geq g(\ln(x-1))$ $\therefore x-\ln m\geq \ln(x-1)$

$\therefore \ln m\leq x-\ln(x-1)$ ……………………10 分

令 $h(x)=x-\ln(x-1)$， $x\in(1,+\infty)$

$\therefore h'(x)=1-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}$ 令 $h'(x)=0$， $x=2$

当 $x\in(1,2)$ 时，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)$ 递减，

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 递增

$\therefore h(x)_{\min}=h(2)=2\qquad \therefore m\in\left(0,e^2\right]$ ……………………12 分

（解法三）

$\because f(x)\ge 0\qquad \therefore e^x\ge m\ln(mx-m)-m$

$$\therefore \frac{e^x}{m}\ge \ln\left[m(x-1)\right]-\ln e$$ ……………………6 分

$$\therefore \frac{e^x}{m}\ge \ln\frac{m(x-1)}{e}$$

$$\therefore \frac{ee^{x-1}}{m(x-1)}\ge \frac{m}{e}\cdot\frac{\ln\frac{m(x-1)}{e}}{\frac{m(x-1)}{e}}$$ ……………………8 分

$\because e^x\ge ex\qquad \therefore e^{x-1}\ge e(x-1)$

$\therefore \dfrac{e^{x-1}}{x-1}\ge e$　当且仅当 $x=2$ 时取"="号 ……………………9 分

$\because \ln x\le \dfrac{1}{e}x\qquad \therefore \ln\dfrac{m(x-1)}{e}\le\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{m(x-1)}{e}$

$$\therefore \frac{\ln\frac{m(x-1)}{e}}{\frac{m(x-1)}{e}}\le\frac{1}{e}$$ ……………………10 分

令 $\varphi(x)=\dfrac{e}{m}\cdot\dfrac{e^{x-1}}{x-1}-\dfrac{m}{e}\cdot\dfrac{\ln\frac{m(x-1)}{e}}{\frac{m(x-1)}{e}}$，$\varphi(x)\ge\dfrac{e}{m}e-\dfrac{m}{e}\cdot\dfrac{1}{e}\ge 0$

$\therefore \dfrac{e^2}{m}\ge\dfrac{m}{e^2}\qquad \therefore m\in\left(0,e^2\right]$ ……………………12 分

22.　（1）$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$， ……………………1 分

$a=2$， ……………………2 分

$a^2=b^2+c^2 \quad \therefore \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……………………3 分

（2）① （解法一）

$\because k_{AF_1}=\frac{y_1}{x_1+1}$， $k_{BF_2}=\frac{y_2}{x_2-1}$，

$\therefore \begin{cases} x=\frac{x_1+1}{y_1}y-1 \\ x=\frac{x_2-1}{y_2}y+1 \end{cases}$ $\therefore \frac{x_2-1}{y_2}y_0+1=\frac{x_1+1}{y_1}y_0-1$ ……………………4 分

$\therefore \frac{x_1+1}{y_1}y_0-\frac{x_2-1}{y_2}y_0=2$

$\therefore (x_1+1)y_2-(x_2-1)y_1=\frac{2y_1y_2}{y_0}$

$\therefore x_1y_2-x_2y_1+y_2+y_1=\frac{2y_1y_2}{y_0}$

又$\because \overrightarrow{F_1B}=(x_2+1,y_2)$，$\overrightarrow{F_2A}=(x_1-1,y_1)$

$\therefore (x_2+1)y_1-(x_1-1)y_2=0$ ……………………5 分

即 $x_2y_1-x_1y_2+y_1+y_2=0$

$\therefore y_2+y_1$ [illegible]

$\therefore y_1+y_2=\frac{y_1y_2}{y_0}$，　即 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_0}$ ……………………6 分

（解法二）

$\because AF_2//BF_1$

$\therefore \Delta QAF_2 \sim \Delta QF_1B$ ……………………4 分

$\therefore \frac{QF_1}{QA}=\frac{QB}{QF_2}$

$\therefore \frac{AF_1}{QA}=\frac{BF_2}{QF_2}$ ……………………5 分

$\therefore \frac{y_1}{y_1-y_0}=\frac{y_2}{y_0}$ 　　$\therefore y_1y_0=y_1y_2-y_0y_2$

$\therefore \frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_0}$ ……………………6 分

② 设 $QF_2: x=\frac{x_0-1}{y_0}y+1=t_2y+1$，（令 $t_2=\frac{x_0-1}{y_0}$） ……………………7 分

$\because \begin{cases} x=t_2y+1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，消去 x 得：$3(t_2y+1)^2+4y^2=12$，

$\therefore 3t_2^2y^2+6t_2y+3+4y^2=12$，　　$\therefore (3t_2^2+4)y^2+6t_2y-9=0$，

$\therefore 9\left(\frac{1}{y}\right)^2-6t_2\left(\frac{1}{y}\right)-(3t_2^2+4)=0$，

$\therefore \frac{1}{y_2}=\frac{t_2+2\sqrt{t_2^2+1}}{3}$， ……………………8 分

$\therefore \frac{1}{y_2}=\frac{\frac{x_0-1}{y_0}+\frac{2}{y_0}\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}}{3}=\frac{(x_0-1)+2|QF_2|}{3y_0}$

设 $QF_1: x=\frac{x_0+1}{y_0}y-1=t_1y-1$，（令 $t_1=\frac{x_0+1}{y_0}$） ……………………9 分

$\because \begin{cases} x=t_1y-1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，消去 x 得：$3(t_1y-1)^2+4y^2=12$，

$\therefore 3t_1^2y^2-6t_1y+3+4y^2=12$，　　$\therefore (3t_1^2+4)y^2-6t_1y-9=0$，

$\therefore 9\left(\frac{1}{y}\right)^2+6t_1\left(\frac{1}{y}\right)-(3t_1^2+4)=0$，

$\therefore \frac{1}{y_1}=\frac{-t_1+2\sqrt{t_1^2+1}}{3}$ ……………………10 分

$\therefore \frac{1}{y_1}=\frac{-\frac{x_0+1}{y_0}+\frac{2}{y_0}\sqrt{(x_0^2+1)^2+y_0^2}}{3}=\frac{-(x_0+1)+2|QF_1|}{3y_0}$

$$\therefore \frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{-(x_0+1)+2|QF_1|}{3y_0}+\frac{(x_0-1)+2|QF_2|}{3y_0}=\frac{-2+2(|QF_1|+|QF_2|)}{3y_0}$$

$$\frac{-2+2\cdot 3}{3y_0}=\frac{4}{3y_0}$$ ……………………12 分

（注：若只猜出最后答案，给 1 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。