数学(理科)参考答案

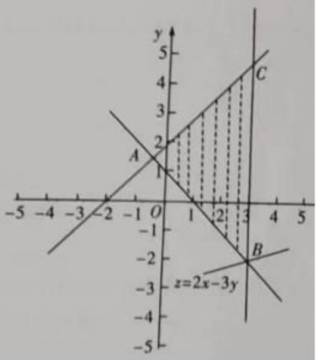
一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	D	C	B	A	B	B	C	B	A	B

1. B 【解析】$\because x>0,y=x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$, $\therefore A=[2,+\infty)$, 又$\because B=(1,3)$, $\therefore A\cap B=[2,3)$. 故选 B.

2. D 【解析】$\because z=(2+ai)i=-a+2i$, 又$\because$"等部复数"的实部和虚部相等,复数 z 为"等部复数",
$\therefore -a=2$, 解得 $a=-2$, $\therefore z=2+2i$, $\therefore \bar{z}=2-2i$, 即 $\bar{z}+ai=2-4i$,
$\therefore$复数 $\bar{z}+ai$ 在复平面内对应的点是 $(2,-4)$, 位于第四象限. 故选 D.

3. D 【解析】由约束条件作出可行域如图,



联立$\begin{cases}x=3,\\x+y-1=0,\end{cases}$解得点 $B(3,-2)$,

化目标函数 $z=2x-3y$ 为 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}z$,

由图可知,当直线 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}z$ 过点 B 时,直线在 y 轴上的截距最小,z 有最大值为 12. 故选 D.

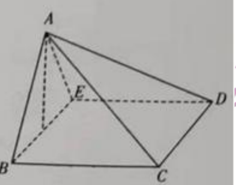
4. C 【解析】$\because x<-1$, $\therefore x^2-1>0$, $x+\frac{1}{x}<-2$,
又$\because \sin x,\cos x\in[-1,1]$, $\therefore \sin x-x>0$, $\cos x+x<0$.
可得:ABD 成立,C 不成立. 故选 C.

5. B 【解析】16 以内的素数有 6 个,符合条件的孪生素数有 3 个,
所以 $P=\frac{3}{C_6^2}=\frac{1}{5}$. 故选 B.

6. A 【解析】观察此数列可知,当 n 为偶数时,$a_n=\frac{n^2}{2}$,当 n 为奇数时,$a_n=\frac{n^2-1}{2}$,

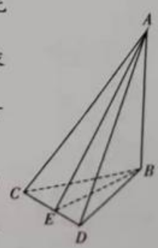
因为 $b_n=(-1)^n a_n=\begin{cases}-\frac{n^2-1}{2}, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{n^2}{2}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 所以数列$\{b_n\}$的前 20 项和为:$(0+2)+(-4+8)+(-12+18)+\cdots$
$+\left(-\frac{19^2-1}{2}+\frac{20^2}{2}\right)=2+4+6+\cdots+20=110$,故选 A.

7. B 【解析】根据几何体的三视图转换为直观图,该几何体为底面为边长为 8 的正方形,高为 6 的四棱锥,如图所示:



故 $V_{A-BCDE}=\frac{1}{3}\times 8\times 8\times 6=128$. 故选 B.

8. B 【解析】对于 A:由 m,$\angle BCD$、$\angle BDC$ 可以解$\triangle BCD$,又 $AB=BC\cdot\tan\angle ACB$,可求塔高度 AB;
对于 B:在$\triangle BCD$ 中,由 $CD=m$,$\angle BCD$ 无法解三角形,在$\triangle ACD$ 中,由 $CD=m$,$\angle ACD$ 无法解三角形,
在$\triangle BCA$ 中,已知两角$\angle ACB$、$\angle ABC$ 无法解三角形,所以无法解出任意三角形,故不能求塔高度 AB;
对于 C:由 $CD=m$,$\angle ACD$、$\angle ADC$ 可以解$\triangle ACD$,可求 AC,又 $AB=AC\cdot\sin\angle ACB$,即可求塔高度 AB;



对于 D:如图,过点 B 作 $BE\perp CD$ 于点 E,连接 AE,由 $\cos\angle ACB=\frac{BC}{AC}$,$\cos\angle BCD=\frac{EC}{BC}$,
$\cos\angle ACE=\frac{EC}{AC}$,知 $\cos\angle ACE=\cos\angle ACB\cdot\cos\angle BCD$,故可知$\angle ACD$ 的大小,由$\angle ACD$、$\angle ADC$,m 可解$\triangle ACD$,可求 AC,又 $AB=AC\cdot\sin\angle ACB$,可求塔高度 AB. 故选 B.

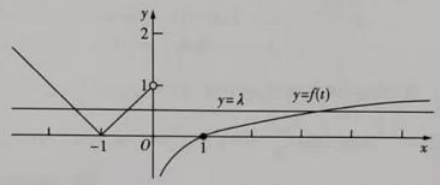
9. C 【解析】函数 $f(x)=\cos 2x$ 的周期为 π，将函数的图象向右平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，可得 $g(x)=\cos(2x-2\varphi)$，由 $|f(x_1)-g(x_2)|=2$ 可知，两个函数的最大值与最小值的差为 2，且 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{6}$，不妨设 $x_1=0$，则 $x_2=\pm\frac{\pi}{6}$，即 $g(x)$ 在 $x_2=\pm\frac{\pi}{6}$ 时取得最小值，由于 $\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}-2\varphi\right)=-1$，此时 $\varphi=-\frac{\pi}{3}-k\pi,k\in\mathbf{Z}$，不合题意；$\cos\left[2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\varphi\right]=-1$，此时 $\varphi=-\frac{2}{3}\pi-k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=-1$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{3}$ 满足题意. 故选 C.

10. B 【解析】令 $g(x)=t$，则方程 $f(t)=\lambda$ 的解有 3 个，由图象可得，$0<\lambda<1$. 且三个解分别为 $t_1=-1-\lambda,t_2=-1+\lambda,t_3=10^{\lambda}$，则 $x^2-4x+1+2\lambda=-1-\lambda,x^2-4x+1+2\lambda=-1+\lambda,x^2-4x+1+2\lambda=10^{\lambda}$，均有两个不相等的实根，

则 $\Delta_1>0$，且 $\Delta_2>0$，且 $\Delta_3>0$，即 $16-4(2+3\lambda)>0$ 且 $16-4(2+\lambda)>0$，解得 $0<\lambda<\frac{2}{3}$，

当 $0<\lambda<\frac{2}{3}$ 时，$\Delta_3=16-4(1+2\lambda-10^{\lambda})>0$，即 $3-2\lambda+10^{\lambda}>0$ 恒成立，故 λ 的取值范围为 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$. 故选 B.



11. A 【解析】由题意可知：$F(-2,0)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，AB 的中点为 P，过点 A,B,M 的圆的圆心坐标为 $G(0,t)$，

则 $|GM|=\sqrt{t^2+7}=r$，由题意知：直线 AB 的斜率存在且不为 0，设直线 AB 的方程为：$x=my-2$，

联立方程组 $\begin{cases}x=my-2,\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1,\end{cases}$ 化简整理可得，$(m^2-3)y^2-4my+1=0$，则 $m^2-3\neq0$，$\Delta=16m^2-4(m^2-3)=12m^2+12>0$，$y_1+y_2=\frac{4m}{m^2-3}$，$y_1y_2=\frac{1}{m^2-3}$，

故 AB 的中点 P 的纵坐标 $y_p=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2m}{m^2-3}$，横坐标 $x_p=my_p-2=\frac{6}{m^2-3}$，则 $P\left(\frac{6}{m^2-3},\frac{2m}{m^2-3}\right)$，

由圆的性质可知：圆心与弦中点连线的斜率垂直于弦所在的直线，

所以 $k_{PG}=\frac{\frac{2m}{m^2-3}-t}{\frac{6}{m^2-3}-0}=-m$，化简整理可得：$t=\frac{8m}{m^2-3}$①，则圆心 $G(0,t)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|mt-2|}{\sqrt{1+m^2}}$，

$|AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\frac{16m^2+12}{(m^2-3)^2}}=\frac{2\sqrt{3}(1+m^2)}{|m^2-3|}$，

$r^2=d^2+\left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2$，即 $t^2+7=\frac{(mt-2)^2}{1+m^2}+\frac{3(m^2+1)^2}{(m^2-3)^2}$，

将①代入可得：$\frac{64m^2}{(m^2-3)^2}+7=\frac{\left(\frac{8m^2}{m^2-3}-2\right)^2}{1+m^2}+\frac{3(1+m^2)^2}{(m^2-3)^2}$，即 $\frac{64m^2}{(m^2-3)^2}+7=\frac{36m^2+36}{(m^2-3)^2}+\frac{3(1+m^2)^2}{(m^2-3)^2}$，

整理可得：$m^4-5m^2+6=0$，则 $(m^2-2)(m^2-3)=0$，因为 $m^2-3\neq0$，所以 $m^2-2=0$，解得 $m=\pm\sqrt{2}$，

$\therefore k=\frac{1}{m}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

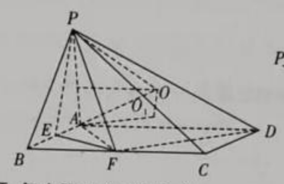
12. B 【解析】如图所示，把 AP,PB 剪开，使得 $\triangle PAB$ 与矩形 $ABCD$ 在同一个平面内.

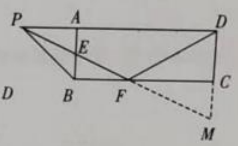
延长 DC 到 M，使得 $CM=DC$，则四点 P,E,F,M 在同一条直线上时，$PE+EF+FD$ 取得最小值，即空间四边形 $PEFD$ 的周长取得最小值. 可得 $CF=\frac{1}{2}PD=2$，$\therefore BF=1$. $\therefore$ 点 E 为 AB 的中点.

如图所示，设$\triangle AFD$的外心为O_1，外接圆的半径为r，则$2r=\dfrac{AF}{\sin 45^\circ}=\sqrt{10}$.

设三棱锥$P-ADF$外接球的半径为R，球心为O，连接OO_1，则$OO_1=\dfrac{1}{2}PA=\dfrac{1}{2}$，

则$R^2=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{11}{4}$. $\therefore$三棱锥$P-ADF$外接球的表面积$=4\pi R^2=11\pi$. 故选B.





二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. -70 【解析】要求a_2，即求展开式中x^2项的系数. 因为原式$=x(2x+1)^7-(2x+1)^7$，
对于$(2x+1)^7$，其通项为$T_{k+1}=C_7^k(2x)^k=2^kC_7^kx^k$.
故原式含x^2的项为$x\cdot 2C_7^1x-2^2C_7^2x^2$，所以系数为$2\times C_7^1-2^2C_7^2=-70$. 故答案为$-70$.

14. -4 【解析】$\because \boldsymbol{a}=(2,1),\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\therefore \boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=(2+m,1)$.
$\because \boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c}=(1,2)$，$\therefore 1\times(2+m)+2=0$，解得$m=-4$.

15. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】等式$\sin\beta+2\cos\alpha=\sqrt{2}$，$2\sin\alpha-\cos\beta=1$，两边同时平方相加，得$\sin(\beta-\alpha)=-\dfrac{1}{2}$，

即$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$，$\because -\dfrac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \alpha-\beta=\dfrac{\pi}{6}$，得$\alpha=\beta+\dfrac{\pi}{6}$，代入$2\sin\alpha-\cos\beta=1$，得$2\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\beta$

$=1$，即$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\because \cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $\left[e^2+\dfrac{1}{e^2},+\infty\right)$ 【解析】$\because$函数$f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x(a\in\mathbf{R})$有两个极值点分别为$x_1,x_2$，

$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\dfrac{x^2-ax+1}{x^2}$，令$g(x)=x^2-ax+1$，其判别式$\Delta=a^2-4$.

当$-2\leqslant a\leqslant 2$时，$\Delta\leqslant 0$，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，不合题意.

当$a<-2$时，$\Delta>0$，$g(x)=0$的两根都小于零，在$(0,+\infty)$上，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，不合题意.

当$a>2$时，$\Delta>0$，设$g(x)=0$的两个根x_1,x_2都大于零，令$x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，$x_1x_2=1$，

当$0<x<x_1$时，$f'(x)<0$，当$x_1<x<x_2$时，$f'(x)>0$，当$x>x_2$时，$f'(x)<0$，

故$f(x)$分别在区间$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上单调递减，在区间(x_1,x_2)上单调递增.

则$a=x_1+x_2=x_2+\dfrac{1}{x_2}>2$，$\therefore a$的取值范围是$(2,+\infty)$.

$\because f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-\left(\dfrac{1}{x_2}-x_2+a\ln x_2\right)=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}+(x_2-x_1)+a(\ln x_1-\ln x_2)$，

$\therefore \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{x_1x_2}-1+a\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

若$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leqslant\dfrac{4e^2}{e^4-1}a-2$恒成立，则$-2+a\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}\leqslant\dfrac{4e^2}{e^4-1}a-2$，$\therefore \dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}\leqslant\dfrac{4e^2}{e^4-1}$，

不妨设$x_1<x_2$，则$x_1-x_2\leqslant\dfrac{e^4-1}{4e^2}(\ln x_1-\ln x_2)$. 又$x_1=\dfrac{1}{x_2}$，$\therefore \dfrac{1}{x_2}-x_2\leqslant\dfrac{e^4-1}{4e^2}(-2\ln x_2)$，

$\therefore \dfrac{1}{x_2}-x_2+\dfrac{e^4-1}{2e^2}\ln x_2\leqslant 0(x_2>1)$①恒成立.

记$F(x)=\dfrac{1}{x}-x+\dfrac{e^4-1}{2e^2}\ln x(x>1)$，$F'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{e^4-1}{2e^2x}$，

数学(理科)参考答案－3

记 $F'(x)=0$ 的两根为 $x'_1=\frac{1}{2}\left[\frac{e^4-1}{2e^2}-\sqrt{\left(\frac{e^4-1}{2e^2}\right)^2-4}\right]$，$x'_2=\frac{1}{2}\left[\frac{e^4-1}{2e^2}+\sqrt{\left(\frac{e^4-1}{2e^2}\right)^2-4}\right]$，

$F(x)$ 在区间 $(1,x'_2)$ 上单调递增，在区间 $(x'_2,+\infty)$ 上单调递减.

且易知 $0<x'_1<1<x'_2<e^2$. 又 $F(1)=0$，$F(e^2)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(1,e^2)$ 时，$F(x)>0$；当 $x\in[e^2,+\infty)$ 时，$F(x)\leqslant 0$.

故由①式可得，$x_2\geqslant e^2$，代入方程 $g(x_2)=x_2^2-ax_2+1=0$，

得 $a=x_2+\frac{1}{x_2}\geqslant e^2+\frac{1}{e^2}$. 又 $a>2$，$\therefore a$ 的取值范围是 $\left[e^2+\frac{1}{e^2},+\infty\right)$.

三、解答题：本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17.【解析】(1) 由题意可得 $a_n-a_{n+1}+3=0$，即 $a_{n+1}-a_n=3$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为公差的等差数列，……（2 分）

$\therefore a_n=a_6+3(n-6)=3n-2$. ……（5 分）

(2) 由 (1) 得 $b_n=(3n-2)\cdot 2^n$，

$\therefore T_n=1\times 2^1+4\times 2^2+\cdots+(3n-2)\cdot 2^n$，① ……（6 分）

$2T_n=1\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+(3n-2)\cdot 2^{n+1}$，② ……（7 分）

①－②得 $-T_n=2+3\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+3\times 2^n-(3n-2)\cdot 2^{n+1}$ ……（8 分）

$=3(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)-4-(3n-2)\cdot 2^{n+1}$

$=3\times\frac{2(2^n-1)}{2-1}-4-(3n-2)\cdot 2^{n+1}=3\times 2^{n+1}-6-4-(3n-2)\cdot 2^{n+1}$

$=-(3n-5)\cdot 2^{n+1}-10$. ……（11 分）

$\therefore T_n=(3n-5)\cdot 2^{n+1}+10$. ……（12 分）

18.【解析】(1) $r_0<r$. ……（4 分）

(2) 由题中数据可得：$\bar{x}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}x_i=116$，$\bar{y}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}y_i=78$， ……（6 分）

所以 $\sum_{i=1}^{50}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{50}x_iy_i-50\bar{x}\bar{y}=10370$，所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{50}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{50}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{10370}{28540}\approx 0.36$， ……（8 分）

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=78-0.36\times 116=36.24$， ……（9 分）

所以 $\hat{y}=0.36x+36.24$， ……（10 分）

将 $x=125$ 代入，得 $y=0.36\times 125+36.24=81.24\approx 81.2$，

所以估计 B 考生的物理成绩约为 81.2 分. ……（12 分）

19.【解析】(1) 连接 AC 交 BE 于点 G，连接 FG，因为 $PA\parallel$ 平面 BEF，平面 $PAC\cap$ 平面 $BEF=FG$，

所以 $PA\parallel FG$， ……（1 分）

又 $BE\parallel CD$，所以 $\frac{AF}{DE}=\frac{AG}{GC}=\frac{PF}{FC}=\frac{1}{3}$，又 $DE=3$，所以 $AE=1$，$AD=4$.

因为 $PE\perp AD$，易得 $PA=2$，$PD=2\sqrt{3}$，

所以 $PA^2+PD^2=AD^2$，所以 $PA\perp PD$， ……（4 分）

又 $PA\perp PC$，$PD\cap AD=P$，所以 $PA\perp$ 平面 PCD. ……（5 分）

(2) 因为 $PA\perp$ 平面 PCD，所以 $PA\perp CD$，

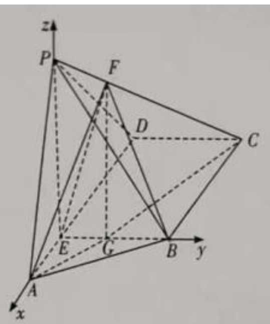
又 $AD\perp CD$，$PA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD，

又 $PE\subset$ 平面 PAD，所以 $PE\perp CD$，$PA\cap CD=D$，

又 $PE\perp AD$，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$. ……（7 分）

如图建系，则 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$D(-3,0,0)$，$F\left(-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$，

$\overrightarrow{AF}=\left(-\frac{7}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$，$\overrightarrow{AB}(-1,\sqrt{3},0)$， ……（8 分）



设平面 ABF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-\frac{7}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{3\sqrt{3}}{4}z=0,\\ -x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 取 $y=1$ 得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,2)$，…………（9分）

又平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且二面角 $F-AB-D$ 为锐角，

故二面角 $F-AB-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$．…………（12分）

0.【解析】(1)由题意可设 $P(x_0,\frac{2\sqrt{5}}{5}x_0)(x_0>0)$，可得 $S_{\triangle PQN}=2S_{\triangle PON}$，

所以 $S_{\triangle PON}=\frac{1}{2}\cdot x_0\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}x_0=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $x_0=1$，$P\left(1,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，…………（2分）

所以 $OP=\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{2}PQ=\frac{3}{5}a$，所以 $a=\sqrt{5}$，…………（4分）

点 P 坐标代入椭圆方程得 $b=1$，所以椭圆 C 方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$，…………（5分）

所以 $c=2$，即 $p=4$，所以抛物线 E 方程为 $y^2=8x$．…………（6分）

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$．

直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，与椭圆 C 的方程联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{5}+y^2=1,\\ y=k(x-2),\end{cases}$ 得 $(1+5k^2)x^2-20k^2x+20k^2-5=0$．

$\Delta=400k^4-20(5k^2+1)(4k^2-1)=20(k^2+1)>0$．$x_1+x_2=\frac{20k^2}{1+5k^2}$，$x_1x_2=\frac{20k^2-5}{1+5k^2}$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{5}(k^2+1)}{1+5k^2}$．…………（8分）

直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，与抛物线 E 的方程联立 $\begin{cases}y^2=8x,\\ y=k(x-2),\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(4k^2+8)x+4k^2=0$．

$x_3+x_4=\frac{4k^2+8}{k^2}$，$|CD|=x_3+x_4+4=\frac{8(k^2+1)}{k^2}$．…………（9分）

$\frac{\sqrt{5}}{|AB|}+\frac{\lambda}{|CD|}=\frac{1+5k^2}{2(k^2+1)}+\frac{\lambda k^2}{8(k^2+1)}=\frac{(20+\lambda)k^2+4}{8(k^2+1)}$．…………（10分）

要使 $\frac{\sqrt{5}}{|AB|}+\frac{\lambda}{|CD|}$ 为常数，则 $20+\lambda=4$，得 $\lambda=-16$．

故存在 $\lambda=-16$，使 $\frac{\sqrt{5}}{|AB|}+\frac{\lambda}{|CD|}$ 为常数．…………（12分）

21.【解析】(1)$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)=\frac{1}{2}\sin x-x\cos x$，$f'(x)=x\sin x-\frac{1}{2}\cos x$，…………（1分）

令 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=\frac{3}{2}\sin x+x\cos x>0$，则 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)$ 单调递增，…………（2分）

且 $f'(0)=-\frac{1}{2}$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\exists t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(t)=0$，…………（3分）

$x\in(0,t)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，$x\in\left(t,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，…………………………（

且 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$，则 $f(t)<0$，

∴存在唯一零点 $x_0\in\left(t,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(x_0)=0$，即 $f(x)$有唯一零点. …………………………（5

(2) $g(x)=\sin x-x\cos x-ax^3$，

则 $g'(x)=x(\sin x-3ax)$，又令 $h(x)=\sin x-3ax\Rightarrow h'(x)=\cos x-3a$，…………………………（7

①当 $3a\leqslant-1$，即 $a\leqslant-\frac{1}{3}$时，$h'(x)\geqslant0$ 恒成立，∴$h(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，

∴$h(x)\geqslant h(0)=0$，∴$g'(x)\geqslant0$，∴$g(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，

∴$g(x)\geqslant g(0)=0$（不合题意）；…………………………（8分

②当 $3a\geqslant1$ 即 $a\geqslant\frac{1}{3}$时，$h'(x)\leqslant0\Rightarrow h(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递减，

∴$h(x)\leqslant h(0)=0$，∴$g'(x)\leqslant0$，∴$g(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递减，

∴$g(x)\leqslant g(0)=0$（符合题意）；…………………………（10分）

③当 $-1<3a<1$，即$-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3}$时，由 $h'(0)=1-3a>0$，$h'(\pi)=-1-3a<0$，

∴$\exists x_0\in(0,\pi)$，使 $h'(x_0)=0$，且 $x\in(0,x_0)$时，$h'(x)>0\Rightarrow h(x)>h(0)=0\Rightarrow g'(x)>0$，

∴$g(x)$在 $x\in(0,x_0)$上单调递增，∴$g(x)>g(0)=0$（不符合题意）. …………………………（11分）

综上：$a\geqslant\frac{1}{3}$. …………………………（12分）

22.【解析】(1) 由 $\rho^2\cos^2\theta+2\rho^2\sin^2\theta=4$ 得椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，其焦点 F 坐标为$(\sqrt{2},0)$，…………（2分）

由题意得直线 l 经过点 F，其标准的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），…………………………（3分）

代入椭圆 C 的方程整理得 $3t^2+4t-4=0$，所以 $t_1+t_2=-\frac{4}{3}$，$t_1t_2=-\frac{4}{3}$，…………………………（4分）

所以$|FA|+|FB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{16}{9}+4\times\frac{4}{3}}=\frac{8}{3}$. …………………………（5分）

(2) 由椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，可设点 P 坐标为$(2\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$，…………………………（6分）

又直线 l 的直角坐标方程为 $x-y-\sqrt{2}=0$，

∴点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{6}\cos(\theta+\varphi)-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}$，其中 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，…………（8分）

所以 $d_{\max}=\sqrt{3}+1$，因为 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d$，$|AB|=|FA|+|FB|=\frac{8}{3}$，

所以$\triangle PAB$ 的面积最大值为$\frac{4(\sqrt{3}+1)}{3}$. …………………………（10分）

23.【解析】(1) $f(x)=\begin{cases}-x-2, & x<\frac{1}{2},\\ 3x-4, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant3,\\ x+2, & x>3,\end{cases}$ …………………………（3分）

由图可知当 $x=\frac{1}{2}$时，$f(x)$有最小值$-\frac{5}{2}$，

所以 $m=-\frac{5}{2}$. …………………………（5分）

(2) 由(1)可得 $a+b=5$，因为 a,b 为正实数，所以$\frac{a^2}{b}+b\geqslant2a$，$\frac{b^2}{a}+a\geqslant2b$. …………………………（8分）

所以$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+b=5$. …………………………（10分）

数学(理科)参考答案－6

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖