天一大联考
2022—2023 学年高一年级阶段性测试(三)
数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查向量的线性运算.

解析　$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PC}$.

2. 答案　B

命题意图　本题考查向量的数量积运算.

解析　由题意知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot 2|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|=3$.

3. 答案　C

命题意图　本题考查向量的坐标运算.

解析　$\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反,$\therefore \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda<0)$. 设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则 $(x,y)=\lambda(-2,3)$,于是 $\begin{cases}x=-2\lambda,\\ y=3\lambda.\end{cases}$ 由 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{13}$,得 $x^2+y^2=52$,即 $4\lambda^2+9\lambda^2=13\lambda^2=52$,$\therefore \lambda^2=4$,$\therefore \lambda=-2$,$\therefore \boldsymbol{a}=(4,-6)$.

4. 答案　A

命题意图　本题考查正弦定理.

解析　因为 $a=4\sqrt{3}$,$b=12$,$B=60°$,所以由正弦定理可得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{12}=\frac{1}{2}$,所以 $A=30°$ 或 $150°$. 因为 $b>a$,所以 $B>A$,所以 $A=30°$.

5. 答案　A

命题意图　本题考查余弦定理.

解析　由余弦定理可得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$,解得 $AC=3$,则在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$.

6. 答案　B

命题意图　本题考查向量的数量积运算.

解析　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BE})=(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)=\frac{3}{4}|\overrightarrow{BC}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|^2=12-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+2=14-\frac{5}{4}|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=14-\frac{5}{4}\times 2\times 4\times\frac{1}{2}=9$.

7. 答案　B

命题意图　本题考查平面向量基本定理.

解析　$\because E$ 为 AD 边上靠近点 A 的三等分点,F 为 AB 边上靠近点 B 的四等分点,$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. 设

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\lambda\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AF}+3\overrightarrow{AE}\right)$,∵ E,F,P 三点共线,∴ $\frac{4}{3}\lambda+3\lambda=1$,解得 $\lambda=\frac{3}{13}$,于是$\overrightarrow{AP}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{3}{13}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{3}{13}\boldsymbol{a}+\frac{3}{13}\boldsymbol{b}$.

8. **答案** C

命题意图 本题考查解三角形.

解析 ∵ $2(\cos A\cos B+\cos C)=\sqrt{3}\sin B, A+B+C=\pi$,∴ $2\cos A\cos B+2\cos(\pi-A-B)=\sqrt{3}\sin B, 2\cos A\cos B-2\cos(A+B)=\sqrt{3}\sin B$,∴ $2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B$. ∵ $\triangle ABC$ 为锐角三角形,∴ $\sin B\neq0$,∴ $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 而 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,∴ $A=\frac{\pi}{3}$. 由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$,∴ $7=b^2+c^2-6$,∴ $b^2+c^2=13$,则 $b+c=\sqrt{(b+c)^2}=\sqrt{b^2+c^2+2bc}=\sqrt{13+12}=5$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案** AC

命题意图 本题考查平面向量的模及向量垂直的定义.

解析 因为 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,所以$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$,故 A 正确;由题可知 $\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{2},2\right)$,因为 $2\times2-1\times\frac{3}{2}\neq0$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$ 不共线,故 B 错误;因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,1)\cdot(-2,4)=0$,所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,故 C 正确;因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向不相同,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\neq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,故 D 错误.

10. **答案** BC

命题意图 本题考查共线向量的定义及向量的运算.

解析 $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是共线向量,也可能是 $AB /\!/ CD$,故 A 错误;设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$,∵ $\boldsymbol{a}=(1,3)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,-3)$,∴ $\begin{cases}1-x=-1,\\3-y=-3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=2,\\y=6,\end{cases}$ ∴ $\boldsymbol{b}=(2,6)$,又∵ $1\times6-3\times2=0$,∴ $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,故 B 正确;由已知得$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{0}$,∴ $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$,∴ $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=2$,故 C 正确;由$|\boldsymbol{a}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$整理可得$|\boldsymbol{b}|^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角是 θ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}}=\frac{\frac{3}{2}|\boldsymbol{a}|^2}{\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角是$\frac{\pi}{6}$,故 D 错误.

11. **答案** AD

命题意图 本题考查平面向量的投影向量的定义、向量的模及向量垂直的定义.

解析 因为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量的模为$|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 A 正确;因为 $\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量的模为$\frac{(\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{a}^2+\sqrt{3}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{3^2+\sqrt{3}\times3\times1\times\cos\frac{\pi}{6}}{3}=\frac{9}{2}$,故 B 错误;$|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=t^2\boldsymbol{a}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=9t^2+2t\times\frac{3\sqrt{3}}{2}+1=9t^2+3\sqrt{3}t+1=9\left(t+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{1}{4}$,当 $t=-\frac{\sqrt{3}}{6}$时,$|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$取得最小值$\frac{1}{2}$,此时 $\boldsymbol{a}\cdot(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$

$t\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9t+\frac{3\sqrt{3}}{2}=9\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}=0$,所以 $\boldsymbol{a}\perp(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,故 C 错误,D 正确.

12. **答案** BC

命题意图 本题考查解三角形.

解析 $\because a(\sin A-\sin B)=c\sin C-b\sin B$,$\therefore$ 由正弦定理可得 $a(a-b)=c^2-b^2$,即 $a^2+b^2-c^2=ab$,由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,$\because 0<C<\pi$,$\therefore C=\frac{\pi}{3}$,故 A 错误;由题可知 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\sqrt{3}$,$\therefore ab=4$,由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab\geqslant 2ab-ab=ab=4$,$\therefore c\geqslant 2$,当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立,故 c 的最小值为 2,故 B 正确;由题可知 $A=\frac{\pi}{4}$,由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{8}$,故 C 正确;由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,即 $7=a^2+9-3a$,$a^2-3a+2=0$,解得 $a=1$ 或 $a=2$,故 D 错误.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $-\frac{1}{2}$

命题意图 本题考查向量的坐标运算.

解析 由题可知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x-1,3)$,由 $\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 知 $2x+1=0$,$\therefore x=-\frac{1}{2}$.

14. **答案** $-\frac{1}{5}$

命题意图 本题考查向量的运算.

解析 $\because \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$,$\therefore \overrightarrow{BA}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AC}$,$\therefore m=-\frac{1}{5}$.

15. **答案** $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

命题意图 本题考查向量的运算.

解析 以 O 为坐标原点,OB 所在直线为 x 轴,垂直于 OB 且向上的方向为 y 轴建立平面直角坐标系,则 $B(4,0)$. 设 $P(x_1,y_1)$,$A(x_2,y_2)$,于是 $x_1=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$,$y_1=2\sin\frac{\pi}{6}=1$,且 $x_2=2\cos\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$,$y_2=2\sin\frac{5\pi}{6}=1$. 由 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ 得 $(\sqrt{3},1)=m(-\sqrt{3},1)+n(4,0)$,$\therefore \begin{cases}\sqrt{3}=-\sqrt{3}m+4n,\\ 1=m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\ n=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ $\therefore m+n=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. **答案** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

命题意图 本题考查正弦定理与余弦定理的应用.

解析 由 $2b^2=2a^2+c^2$ 得 $a^2=b^2-\frac{c^2}{2}$,而 $A=\frac{\pi}{4}$,由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $b^2-\frac{c^2}{2}=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$,整理可得 $b=\frac{3}{2\sqrt{2}}c$. 所以 $a^2=b^2-\frac{c^2}{2}=\frac{9}{8}c^2-\frac{c^2}{2}=\frac{5}{8}c^2$,于是 $\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. 由正弦定理可得 $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=$

$\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$,所以 $\sin C=\dfrac{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查平面向量共线及向量的夹角的定义.

解析 (Ⅰ)由题可知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,2)+(1,t)=(2,2+t)$, ……(1 分)

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,2)-(1,t)=(0,2-t)$. ……(2 分)

$\because (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

$\therefore 2(2-t)=0$, ……(4 分)

$\therefore t=2$. ……(5 分)

(Ⅱ)若 $t=1$,则 $\boldsymbol{b}=(1,1)$,

$\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=(1+m,2+m)$. ……(6 分)

$\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角,

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b})>0$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$ 不共线, ……(7 分)

$\therefore \begin{cases}1+m+2(2+m)>0,\\ 2(1+m)\neq 2+m,\end{cases}$ ……(8 分)

解得 $m>-\dfrac{5}{3}$ 且 $m\neq 0$,

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left(-\dfrac{5}{3},0\right)\cup(0,+\infty)$. ……(10 分)

18. **命题意图** 本题考查向量的数量积及夹角的求解.

解析 (Ⅰ)$\because \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量,且 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $120°$,

$\therefore \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1\times1\times\cos 120°=-\dfrac{1}{2}$. ……(2 分)

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)$

$=2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-2+1-\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2$

$=-1-2+1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$. ……(5 分)

(Ⅱ)设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

$\because |\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{4-4\times\dfrac{1}{2}+1}=\sqrt{3}$, ……(7 分)

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)^2}=\sqrt{1+2\times\dfrac{1}{2}+1}=\sqrt{3}$, ……(9 分)

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$. ……(10 分)

又$\because \theta\in[0°,180°]$,

$\therefore \theta=120°$,

$\therefore \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$. ……(12 分)

19. **命题意图** 本题考查解三角形.

解析 (Ⅰ)因为 $\sin 2B=\sin B$,即 $2\sin B\cos B=\sin B$, ……(2 分)

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………………………………… (3 分)

因为 $B\in(0,\pi)$,

所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

所以$\frac{1}{2}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

即 $ac=a^2+c^2-b^2$. ①………………………………………………………………………………… (7 分)

因为 $a+c=\sqrt{3}b$,

所以 $b=\frac{a+c}{\sqrt{3}}$. ②………………………………………………………………………………… (8 分)

将②代入①,得 $ac=a^2+c^2-\frac{1}{3}(a^2+2ac+c^2)$,

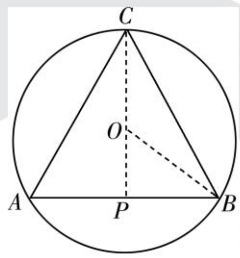
整理得 $(a-2c)(2a-c)=0$. ………………………………………………………………………… (10 分)

因为 $a>c$,

所以 $a=2c$. ………………………………………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查向量的运算.

解析 (Ⅰ)如图,连接 OB,OC,OP,CP.



$\because$ $\triangle ABC$ 的外心为点 O,P 为边 AB 的中点,

$\therefore$ $OP\perp AB$. ……………………………………………………………………………………… (2 分)

$\because$ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CP}$,

$\therefore$ $\overrightarrow{CO}=\lambda(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=2\lambda\overrightarrow{CP}$, ……………………………………………………………… (3 分)

$\therefore$ C,O,P 三点共线,

$\therefore$ $CP\perp AB$. ……………………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $CP\perp AB$.

又 P 为边 AB 的中点,

$\therefore$ $CA=CB$,

$\therefore$ $\angle PCA=\angle PCB$. …………………………………………………………………………… (7 分)

$\because$ $OB=OC$,

$\therefore$ $\angle PCB=\angle OBC$,

$\therefore$ $\angle POB=2\angle PCB=\angle ACB$. ……………………………………………………………… (9 分)

$\because$ $\cos\angle POB=\frac{OP}{OB}=\frac{OP}{OC},\lambda=\frac{5}{14}$,

$\therefore \overrightarrow{CO}=\frac{5}{7}\overrightarrow{CP}=\frac{5}{7}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP})$, ………………………………………… (10 分)

$\therefore \frac{2}{7}\overrightarrow{CO}=\frac{5}{7}\overrightarrow{OP}$,即 $2\overrightarrow{CO}=5\overrightarrow{OP}$,

$\therefore \frac{OP}{OC}=\frac{2}{5}$,

即 $\cos\angle ACB=\frac{2}{5}$. ………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查向量的运算.

解析 (Ⅰ)$\because \overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\mathbf{0}$,

$\therefore \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=-3\overrightarrow{EB}$. ………………………………………… (1 分)

又 F 为 AC 边的中点,

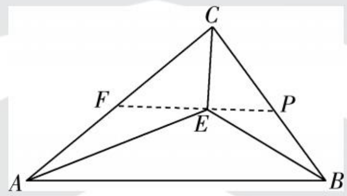
$\therefore 2\overrightarrow{EF}=-3\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{BE}$. ………………………………………… (3 分)

$\because \overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BF}$,

$\therefore \overrightarrow{BE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BF}$,

$\therefore 5\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BF}$. ………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)如图,设 BC 边的中点为 P,连接 EF,EP.



$\because \overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{EC}=\mathbf{0}$,

$\therefore \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=-2(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC})$,

$\therefore 2\overrightarrow{EF}=-4\overrightarrow{EP}$,即$\overrightarrow{EF}=-2\overrightarrow{EP}$, ………………………………………… (7 分)

$\therefore F,E,P$ 三点共线. ………………………………………… (8 分)

设点 E,F 到 BC 的距离分别为 d_1,d_2,

则 $d_1:d_2=1:3$. ………………………………………… (9 分)

设点 A 到 BC 的距离为 d_3.

$\because F$ 是 AC 的中点,$\therefore d_2:d_3=1:2$, ………………………………………… (10 分)

$\therefore d_1:d_3=1:6$, ………………………………………… (11 分)

$\therefore S':S=d_1:d_3=1:6$,即 $S=6S'$. ………………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查解三角形.

解析 (Ⅰ)$\because \sin^2A+\sin^2C-\sin^2B=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B\sin C$,

$\therefore$ 由正弦定理可得 $a^2+c^2-b^2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}ac\sin B$. ………………………………………… (2 分)

由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, ………………………………………… (3 分)

$\therefore 2ac\cos B=-\frac{2\sqrt{3}}{3}ac\sin B$,即 $\tan B=-\sqrt{3}$. ………………………………………… (4 分)

$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$. ······························· (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore 2ac\cos\angle ABC=-ac=a^2+c^2-b^2$. ······························· (6 分)

又 $a^2+c^2+3c=b^2$，

$\therefore -ac=a^2+c^2-(a^2+c^2+3c)$，

解得 $a=3$. ······························· (7 分)

$\because \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{15}{2}$，

$\therefore ac\cos\angle ABC=-\frac{ac}{2}=-\frac{15}{2}$，

可得 $c=5$. ······························· (8 分)

由 $a^2+c^2+3c=b^2$ 可得 $9+25+15=b^2$，

解得 $b=7$. ······························· (9 分)

$\because \overrightarrow{BD}$在$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{BA}$上的投影向量的模相等，

$\therefore BD$ 为$\angle ABC$ 的平分线.

由角平分线的性质知$\frac{AD}{b-AD}=\frac{c}{a}$，

即$\frac{AD}{7-AD}=\frac{5}{3}$，解得 $AD=\frac{35}{8}$. ······························· (10 分)

在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin\angle ABC}=\frac{14}{\sqrt{3}}$，$\therefore \sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$. ······························· (11 分)

在$\triangle ABD$ 中，$\angle ABD=\frac{\pi}{3}$，

由正弦定理可得$\frac{BD}{\sin A}=\frac{AD}{\sin\angle ABD}$，即$\frac{BD}{\frac{3\sqrt{3}}{14}}=\frac{\frac{35}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，

解得 $BD=\frac{15}{8}$. ······························· (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。