湘豫名校联考
2023年9月高三一轮复习诊断考试(一)
数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	D	D	A	D	C	AB	AC	~~ABD~~	ACD

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C 【命题意图】本题考查全称量词命题及其否定形式,考查了逻辑推理的核心素养.

【解析】全称量词命题的否定为存在量词命题,根据 $\neg p$ 的定义,可知C选项正确.故选C.

2. B 【命题意图】本题考查集合的交、并、补集的运算,考查了数学运算的核心素养.

【解析】由题可得 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$,所以 $\complement_U A=\{-3,-2,-1,2\}$,所以 $(\complement_U A)\cap B=\{-3,-1\}$.故选B.

3. A 【命题意图】本题考查导数的几何意义,考查了数学运算的核心素养.

【解析】因为点 $A(1,2)$ 在曲线 $y=ax+b\ln x$ 上,所以 $a=2$.因为 $y'=a+\frac{b}{x}$,所以该曲线在点 A 处的切线斜率 $k=2+b$.所以切线方程为 $y-2=(2+b)(x-1)$.令 $x=0$,则 $y=-b=1$,故 $b=-1$.故选A.

4. D 【命题意图】本题考查三角函数的图象变换,考查了直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】根据题意,$f(x)=\cos(x+\varphi)$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到 $y=\cos(2x+\varphi)$ 的图象,再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $g(x)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\varphi\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ 的图象.又函数 $g(x)$ 的一个极值点为 $x=\frac{\pi}{3}$,所以 $2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$.故 $k=1$ 时,φ 可取到最小正数 $\frac{5\pi}{6}$.故选D.

5. D 【命题意图】本题考查函数的图象,考查了直观想象的核心素养.

【解析】因为 $f(-x)=\frac{10\sin(-x)}{2^{-x}+2^{x}}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,排除A,B选项;因为 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{10\sin\frac{3\pi}{2}}{2^{\frac{3\pi}{2}}+2^{-\frac{3\pi}{2}}}=\frac{-10}{2^{\frac{3\pi}{2}}+2^{-\frac{3\pi}{2}}}>-1$,排除C选项.故选D.

6. A 【命题意图】本题考查三角函数的单调性,考查了数学运算的核心素养.

【解析】由题意得 $a>0$.令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,则 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 在 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增.易知 $k=0$,所以 $-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$,所以 $0<a\leqslant\frac{\pi}{12}$.所以实数 a 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$.故选A.

7. D 【命题意图】本题考查三角形的面积公式和基本不等式的应用,考查了数学运算的核心素养.

【解析】由题可得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$,所以 $\frac{1}{2}ab\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times 2b\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\times 2a\sin 90^\circ$,所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}ab=b+$

$2a$，等式两边同除以 ab，得 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$，所以 $2a+b=\frac{2}{\sqrt{3}}(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right)\geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\left(4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $b=2a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立. 故选 D.

8. C 【命题意图】本题考查函数的极值、导数的应用，考查了数学运算的核心素养.

【解析】$f'(x)=3ax^2+4x+a$. 当 $a>0$ 时，方程 $f'(x)=0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有两个不同的实根 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则 $\begin{cases}\Delta=16-12a^2>0,\\ -\frac{2}{3a}>-1,\\ f'(-1)>0,\end{cases}$ 解得 $1<a<\frac{2\sqrt{3}}{3}$；当 $a=0$ 时，$f'(x)=4x$，不满足题意；当 $a<0$ 时，$f'(x)$ 的图象开口向下，若方程 $f'(x)=0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有两个不同的实根 x_1,x_2，则 $f(x)$ 的极大值点 x_1 大于极小值点 x_2，与题意矛盾. 综上所述，$1<a<\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. AB 【命题意图】本题考查不等式的性质，指数函数、对数函数的单调性，考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】根据题意，得 $a>b>0$. 因为 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $2^a>2^b$，A 选项正确；因为 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $a^2>b^2$，B 选项正确；易知 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\frac{1}{a}+a$ 与 $\frac{1}{b}+b$ 的大小不确定，C 选项错误；$a\ln b>b\ln a$，即 $\frac{\ln b}{b}>\frac{\ln a}{a}$. 设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x>0$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$. 因为当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减. 所以 $\frac{\ln b}{b}$，$\frac{\ln a}{a}$ 的大小不确定，D 选项错误. 故选 AB.

10. AC 【命题意图】本题考查函数的概念、导数的运算、导数的几何意义，考查了数学抽象、数学运算的核心素养.

【解析】记 $g(x)=f'(x)$，$k_1=g(x_1)<0$，$k_2=g(x_2)>0$. A 选项，因为 $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，所以 $g'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$. 当 $x>-2$ 时，$g'(x)>0$；当 $x<-2$ 时，$g'(x)<0$. 所以 $g(x)_{\min}=g(-2)=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，所以 $g(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$，所以存在 x_1,x_2 使得 $k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=1$，$k_1\cdot k_2<0$，A 选项正确；B 选项，$g(x)=3x^2+2$，易知 $g(x)$ 的值域为 $[2,+\infty)$，所以不存在 x_1,x_2 使得 $k_1\cdot k_2<0$，B 选项错误；C 选项，因为 $g(x)=1+\ln x$，所以 $g(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$. 所以一定存在 x_1,x_2 使得 $k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=1$，$k_1\cdot k_2<0$，C 选项正确；D 选项，因为 $g(x)=-\frac{1}{x^2}$，所以 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty,0)$，所以不存在 x_1,x_2 使得 $k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=1$，D 选项错误. 故选 AC.

11. ~~ABD~~ 【命题意图】本题考查三角恒等变换，考查了数学运算的核心素养. 11题题干有误，学生统一都得分.

【解析】因为 $3\cos\alpha+\sqrt{10}\cos\beta=3$，$3\sin\alpha-\sqrt{10}\sin\beta=2$，两式平方后相加可得 $9+10+6\sqrt{10}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=13$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$. 因为角 α,β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=$

$\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\frac{10}{100}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 所以 $\tan(\alpha+\beta)=-3$，所以 $\tan(2\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{3}{4}-3}{1+\frac{9}{4}}=$

$-\frac{9}{13}$. 所以 $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{-3-\frac{3}{4}}{1+(-3)\times\frac{3}{4}}=3$. 故选~~ABD~~.

12. ACD 【命题意图】本题考查函数的图象与性质、函数与方程，考查了直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $|\log_2 x_1|=|\log_2 x_2|(0<x_1<1,1<x_2<2)$，所以 $-\log_2 x_1=\log_2 x_2$，所以 $x_1x_2=1$，A 选项正确；当 $x\in(2,4)$ 时，$4-x\in(0,2)$，所以 $f(x)=f(4-x)=|\log_2(4-x)|$. 又 $2<x_3<3,3<x_4<4$，所以 $\log_2(4-x_3)=-\log_2(4-x_4)$. 所以 $(x_3-4)(x_4-4)=1$，B 选项错误；因为当 $x\in[4,+\infty)$ 时，$f(x)=-x^2+10x-24$，所以当 $x\in[4,6]$ 时，$f(x)$ 的图象关于直线 $x=5$ 对称，所以 $x_5x_6=x_5(10-x_5)=-(x_5-5)^2+25$. 又 $x_5\in(4,5)$，所以 $x_5x_6\in(24,25)$，C 选项正确；因为 x_1 与 x_4，x_2 与 x_3 关于直线 $x=2$ 对称，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=8$. 又 x_5 与 x_6 关于直线 $x=5$ 对称，所以 $x_5+x_6=10$. 所以 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=18$，所以 $\sum_{i=1}^{6}x_if(x_i)=a\cdot\sum_{i=1}^{6}x_i=18a$. 由题意可画图判断(图略) $a\in(0,1)$，所以 $\sum_{i=1}^{6}x_if(x_i)\in(0,18)$，D 选项正确，故选 ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2.5 【命题意图】本题考查指数的运算、函数的应用，考查了数学运算的核心素养.

【解析】由题意，池塘甲种微生物的数量增加到原来的 3 倍，则 $y(t_2)=3y(t_1)$，即 $e^{0.44t_2}=3e^{0.44t_1}$. 所以 $e^{0.44(t_2-t_1)}=3$，即 $0.44(t_2-t_1)=\ln 3$. 所以 $t_2-t_1=\frac{\ln 3}{0.44}\approx 2.5$(天).

14. 1 200(3 分) 800π(2 分) 【命题意图】本题考查余弦定理的应用和扇形知识，考查了数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】设彩虹最高点 A 到水平面 BCD 的距离为 x m，由题易得点 A 到平面 BCD 的距离即为 AB 的长度，则 $BC=x$ m，$BD=\sqrt{3}x$ m. 在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$，即 $3x^2=x^2+600^2-2\times600x\times\cos 120^\circ$，整理得 $x^2-300x-180\ 000=0$，解得 $x=-300$(舍去)或 $x=600$. 易得 $BF=600\sqrt{3}$ m. 设圆弧所在圆的半径为 R m，圆心为 O，则 $(R-600)^2+BF^2=R^2$，所以 $R=1\ 200$. 所以 $\angle EOF=120^\circ$. 故彩虹($\overset{\frown}{EAF}$)的长度为 $\frac{1}{3}\times2\pi\times1\ 200=800\pi$ m.

15. 2 024 【命题意图】本题考查抽象函数的性质，考查了逻辑推理的核心素养.

【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$. 由 $f(1-3x)-f(1+3x)=-6x$，可得 $f(1-x)-f(1+x)=-2x$，即 $f(1-x)-(1-x)=f(1+x)-(1+x)$. 设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(-x)=f(-x)+x=-f(x)+x=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，所以 $g(0)=0$，且 $g(1-x)=g(1+x)$，所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 由 $g(1-x)=g(1+x)$，得 $g(-x)=g(2+x)$，所以 $-g(x)=g(2+x)$，所以 $g(4+x)=g[2+(2+x)]=-g(2+x)=-[-g(x)]=g(x)$. 所以 $g(x)$ 的周期为 4. 所以 $g(2\ 024)=g(0)=0$，所以 $f(2\ 024)=g(2\ 024)+2\ 024=2\ 024$.

16. $[1,+\infty)$ 【命题意图】本题考查导数的应用与不等式恒成立问题，考查了数学运算的核心素养.

【解析】由 $ae^{ax-1}\geqslant 1+\ln x$，得 $a>0$，变形得 $axe^{ax}\geqslant ex\ln ex$，所以 $axe^{ax}\geqslant e^{\ln ex}\ln ex$. 令 $g(t)=te^t$，则 $g'(t)=e^t(t+1)$. 当 $t>0$ 时，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数. 若 $\ln ex\leqslant 0$，则不等式恒成立. 若 $\ln ex>0$，则 $x>\frac{1}{e}$，$axe^{ax}\geqslant e^{\ln ex}\ln ex\Leftrightarrow g(ax)\geqslant g(\ln ex)$，所以 $ax\geqslant\ln ex=1+\ln x$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{1+\ln x}{x}$ 恒成立. 设

$h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x},x>\dfrac{1}{e}$，则 $h'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$. 当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$单调递减. 所以 $h(x)$的最大值为 $h(1)=1$，所以 $a\geqslant 1$. 故实数 a 的取值范围是$[1,+\infty)$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【命题意图】本题考查三角恒等变换和三角函数图象的性质，考查了数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-2\cos^2\omega x+2=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x+1$

$=2\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$. ……………………………………………………… 3 分

由题意得 $f(x)$的最小正周期为 π，$\omega>0$，所以 $2\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，即 $\omega=1$. ………………………… 4 分

所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$. ………………………………………………………… 5 分

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，所以 $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$.

所以 $f(x)\in[0,3]$，故函数 $f(x)$的值域为$[0,3]$. ………………………………………………… 6 分

(2)由 $2f\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)+1=3f\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$，得 $2\sin\theta=3\cos\theta$，所以 $\tan\theta=\dfrac{3}{2}$. ……………………… 8 分

所以$\dfrac{1-\sin 2\theta}{\sin 2\theta-2\cos^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}=\dfrac{\tan^2\theta+1-2\tan\theta}{2\tan\theta-2}=\dfrac{1}{4}$. ………………………… 10 分

18.【命题意图】本题考查函数的单调性和含参一元二次不等式的解法，考查了数学运算的核心素养.

【解析】(1)由题意可得，$-1+\dfrac{n}{e^p+1}=-\dfrac{1}{2}$，$-1+\dfrac{n}{e^q+1}=0$，所以$\dfrac{n}{e^p+1}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{n}{e^q+1}=1$，

两式相乘，整理得$\dfrac{n}{e^p+1}\cdot\dfrac{n}{e^q+1}=\dfrac{1}{2}$.

由 $e^{p+q}+(e^p+e^q)-7=0$，得$(e^p+1)(e^q+1)=8$，所以 $n=2$. ………………………………… 2 分

易知 $f(x)=-1+\dfrac{2}{e^x+1}$为减函数，又 $f(0)=0$，

所以当 $f(x)>0$ 时，$x<0$.

故不等式 $f(x)>0$ 的解集为$(-\infty,0)$. ………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $f(x)$为减函数，又 $e^x>0$，所以 $f(x)\in(-1,1)$.

所以 $f(x)$的值域为$(-1,1)$. ………………………………………………………………………… 5 分

因为 $\forall m\in\mathbf{R}$，不等式 $ax^2-(a+1)x\leqslant f(m)(a\geqslant 0)$恒成立，

则 $ax^2-(a+1)x\leqslant -1$.

所以 $ax^2-(a+1)x+1\leqslant 0$. …………………………………………………………………… 6 分

所以原不等式变为$(ax-1)(x-1)\leqslant 0$，

当 $a>0$ 时，不等式两边同除以 a，得$\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-1)\leqslant 0$.

所以当 $0<a<1$ 时，解得 $1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{a}$； …………………………………………………………… 7 分

当 $a=1$ 时，解得 $x=1$；………………………………………………………………………………… 8 分

当 $a>1$ 时，解得$\dfrac{1}{a}\leqslant x\leqslant 1$； ……………………………………………………………………… 9 分

当 $a=0$ 时，原不等式等价于$-x+1\leqslant 0$，即 $x\geqslant 1$. ………………………………………………… 10 分

综上可得，当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为$\left\{x\mid 1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{a}\right\}$；

当 $a=1$ 时,不等式的解集为$\{x|x=1\}$;

当 $a>1$ 时,不等式的解集为$\left\{x|\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant 1\right\}$;

当 $a=0$ 时,不等式的解集为$\{x|x\geqslant 1\}$. ………………………………………………………… 12 分

19.【命题意图】本题考查三角函数的应用和基本不等式的应用,考查了直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为$\triangle ABC$为直角三角形,设$\angle CAB=\theta,0<\theta<\frac{\pi}{2}$,

又 $CP\parallel AB$,

所以$\angle ABC=\angle PCB=\frac{\pi}{2}-\theta$.

因为在直角$\triangle ABC$中,$AB=10$ m,所以 $AC=10\cos\theta$ m,$BC=10\sin\theta$ m. ………………… 2 分

所以 $CA+\overset{\frown}{CPB}=10\cos\theta+5\pi\sin\theta=5\sqrt{4+\pi^2}\sin(\theta+\varphi)$ m$\left(其中 \tan\varphi=\frac{2}{\pi}\right)$. ……………… 3 分

当 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ 时,$CA+\overset{\frown}{CPB}$取到最大值,为 $5\sqrt{4+\pi^2}$ m, ………………………………… 5 分

所以 $\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{\tan\varphi}=\frac{\pi}{2}$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)依题意,设 $MD=x$ m,$\angle AMB=\gamma,\angle AMD=\alpha,\angle BMD=\beta$,则 $\gamma=\alpha-\beta$,

所以 $\tan\alpha=\frac{20}{x},\tan\beta=\frac{10}{x}$,所以 $\tan\gamma=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ………………………………… 7 分

$=\frac{\frac{20}{x}-\frac{10}{x}}{1+\frac{20}{x}\times\frac{10}{x}}=\frac{10}{x+\frac{200}{x}}\leqslant\frac{10}{2\sqrt{x\times\frac{200}{x}}}=\frac{10}{20\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,当且仅当 $x=10\sqrt{2}$ 时等号成立. ………… 9 分

所以当 $MD=10\sqrt{2}$ m 时,对底边 AB 观察的视线所张的角最大. ………………………………… 10 分

因为$\angle CAB=60^\circ$,易得 $BP\perp AB$,所以 $BP=\frac{1}{2}BC=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ m,$BP\perp$平面 AMD,所以 $BP\perp BM$.

因为 $BD=10$ m,$MD=10\sqrt{2}$ m,

所以 $MB=10\sqrt{3}$ m,所以 $\tan\angle PMB=\frac{1}{4}$.

所以从 M 处观察 P 点时仰角的正切值为$\frac{1}{4}$. …………………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查函数的性质及其应用,考查了数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】(1)因为 $y=g(x)+\sin x\cos x=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$, ………………………………… 1 分

令 $t=\sin x+\cos x$,则 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,所以 $y=t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$. ……… 3 分

所以当 $t=-1$ 时,$y_{\min}=-1$;当 $t=\sqrt{2}$ 时,$y_{\max}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………… 4 分

故所求函数的值域为$\left[-1,\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\right]$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)根据题意,易得 $f(x)=e^x,x\in\mathbf{R}$. 欲证$\frac{g(x)-2x-2}{f(x)}\geqslant -1$,即证$\frac{2x+2-\sin x-\cos x}{e^x}\leqslant 1$. ……… 6 分

令 $h(x)=\frac{2x+2-\sin x-\cos x}{e^x},x\in\mathbf{R}$.

则 $h'(x)=\frac{(2-\cos x+\sin x)e^x-(2x+2-\sin x-\cos x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{2\sin x-2x}{e^x}$. ……………………… 8 分

令 $\varphi(x)=2\sin x-2x,x\in\mathbf{R}$,则 $\varphi'(x)=2\cos x-2$.

易知 $\varphi'(x)\leqslant 0$ 恒成立，所以 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数. 又 $\varphi(0)=0$，所以 $h'(0)=0$. …………………… 9 分

又 $e^x>0$ 恒成立，所以当 $x<0$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；

当 $x>0$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，…………………… 11 分

所以 $h(x)_{\max}=h(0)=1$，即 $h(x)\leqslant 1$ 恒成立.

故 $\dfrac{g(x)-2x-2}{f(x)}\geqslant -1$. …………………… 12 分

21.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理的应用，考查了数学运算的核心素养.

【解析】(1) 在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ACD=\dfrac{25+CD^2-49}{2\times 5\times CD}=-\dfrac{1}{5}$，

解得 $CD=4$ 或 $CD=-6$（舍去）. …………………… 1 分

因为 $\cos\angle ACD=-\dfrac{1}{5}$，所以 $\sin\angle ACD=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

所以 $\cos\angle ACD=1-2\sin^2\angle ACO$，解得 $\sin\angle ACO=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$（负值舍去），所以 $\sin\angle DCO=\sin\angle ACO=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

…………………… 3 分

因为 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACO}+S_{\triangle DCO}$，

所以 $\dfrac{1}{2}CA\cdot CD\sin\angle ACD=\dfrac{1}{2}CA\cdot CO\sin\angle ACO+\dfrac{1}{2}CD\cdot CO\sin\angle DCO$. …………………… 4 分

所以 $\dfrac{1}{2}\times 5\times 4\times\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\dfrac{1}{2}\times 5\times CO\times\dfrac{\sqrt{15}}{5}+\dfrac{1}{2}\times 4\times CO\times\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

所以 $CO=\dfrac{8\sqrt{10}}{9}$. …………………… 5 分

(2) 在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}\Rightarrow\dfrac{5}{\sin\angle ADC}=\dfrac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$，

则 $\sin\angle ADC=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，所以 $\cos\angle ADC=\dfrac{5}{7}$. …………………… 6 分

因为 $BD=BC$，所以 $\angle BDC=\angle BCD$，

所以 $\sin\angle BDC=\sin\angle BCD=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，所以 $\cos\angle BDC=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. …………………… 7 分

由余弦定理可得 $\cos\angle BDC=\dfrac{\sqrt{10}}{5}=\dfrac{CD^2+BD^2-BC^2}{2CD\cdot BD}=\dfrac{16}{8BD}=\dfrac{2}{BD}$，

解得 $BD=BC=\sqrt{10}$. …………………… 9 分

因为 $\cos\angle ADC=\dfrac{5}{7}$，

所以 $\sin\angle ADB=\sin(\angle BDC-\angle ADC)=\sin\angle BDC\cos\angle ADC-\cos\angle BDC\sin\angle ADC$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{5}\times\dfrac{5}{7}-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=\dfrac{\sqrt{15}}{35}$， …………………… 11 分

所以 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}DA\cdot DB\sin\angle ADB=\dfrac{1}{2}\times 7\times\sqrt{10}\times\dfrac{\sqrt{15}}{35}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. …………………… 12 分

22.【命题意图】本题考查导数及其应用，考查了数学抽象、数学运算、逻辑推理等核心素养.

【解析】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-e^x$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-e^x$.

因为 $f(1)=-e$，$f'(1)=1-e$，

所以曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(-e)=(1-e)(x-1)$，

即 $(e-1)x+y+1=0$. …………………… 2 分

(2)因为 $g(x)=f(x)+e^x=\ln x+(a-1)(x+1),x>0$,所以 $g'(x)=\frac{1}{x}+a-1,x>0$.

①当 $a-1\geqslant0$,即 $a\geqslant1$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………………………… 4 分

②当 $a-1<0$,即 $a<1$ 时,由 $g'(x)=\frac{1}{x}+a-1>0$,得 $0<x<\frac{1}{1-a}$;

由 $g'(x)=\frac{1}{x}+a-1<0$,得 $x>\frac{1}{1-a}$.

所以 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{1-a}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{1-a},+\infty\right)$上单调递减. ………………………………… 5 分

综上所述,当 $a\geqslant1$ 时,$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当 $a<1$ 时,$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{1-a}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{1-a},+\infty\right)$上单调递减. ………………………………………………………………………… 6 分

(3)因为 $\forall x>0,f(x)=\ln x-e^x+(a-1)(x+1)<0$ 恒成立,

即 $\ln x-e^x<(1-a)(x+1)$恒成立,

令 $\varphi(x)=\ln x-e^x$,则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-e^x$,显然 $\varphi'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

又 $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0,\varphi'(1)<0$,

所以存在唯一实数 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $\varphi'(x_0)=0$,即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$,亦即 $x_0=-\ln x_0$. ……………………… 7 分

所以当 $x\in(0,x_0)$时,$\varphi'(x)>0$;当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$\varphi'(x)<0$.

所以 $\varphi(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,在$(x_0,+\infty)$上单调递减.

所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)=\ln x_0-e^{x_0}=-\left(\frac{1}{x_0}+x_0\right)<-2$,所以 $\ln x-e^x<-2$. ……………………………… 8 分

令 $h(x)=(1-a)(x+1)$,易得 $h(x)$的图象恒过点$(-1,0)$,

①若 $a<1$,则 $h(x)=(1-a)(x+1)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以 $h(x)>h(0)=1-a>-2$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,所以 $a<1$ 符合题意.

②若 $a=1$,则 $h(x)=0$,所以 $h(x)>-2$ 成立,故 $a=1$ 符合题意;

③若 $a>1$,则 $h(x)=(1-a)(x+1)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

当 $a=2$ 时,$h(x)=-x-1$,且 $h(1)=-2$,

又 $\varphi(x)<-2$,所以当 $0<x\leqslant1$ 时,$h(x)\geqslant h(1)=-2>\varphi(x)$.

下证当 $x>1$ 时,$\varphi(x)<h(x)$,即证 $F(x)=\ln x-e^x+x+1<0$.

则 $F'(x)=\frac{1}{x}-e^x+1$,易知 $F'(x)$单调递减.

所以当 $x>1$ 时,$F'(x)<F'(1)=2-e<0$,

所以 $F(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减.所以 $F(x)<F(1)=2-e<0$.

故 $a=2$ 时符合题意;

当 $a\geqslant3$ 时,$1-a\leqslant-2$.取 $a=3$,则 $h(x)=-2x-2$.

因为 $h(1)=-4<\varphi(1)=-e$,不满足 $\ln x-e^x<(1-a)(x+1)$,

所以当 $a\geqslant3$ 时,不符合题意;…………………………………………………………………………………… 11 分

综上所述,满足条件的整数 a 的最大值为 2. ……………………………………………………………………………… 12 分