

盐城市 2023 届高三年级第三次模拟考试

数学试题

(总分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 若集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{x | y = \log_2(1-x)\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1\}$
2. 已知 $ABCD$ 是平面四边形, 设 $p: \overline{AB} = 2\overline{DC}$, $q: ABCD$ 是梯形, 则 p 是 q 的
条件
A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要
3. $(2x^3 - \frac{1}{x})^6$ 展开式中 x^{10} 项的系数为
A. -240 B. -20 C. 20 D. 240
4. 已知 $a, b \in R$, 虚数 $z = 1 + bi$ 是方程 $x^2 + ax + 3 = 0$ 的根, 则 $|z| =$
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$
5. 设 S_n 为下图所示的数阵中前 n 行所有数之和, 则满足 $S_n \leq 1000$ 的 n 的最大值为
第 1 行 1
第 2 行 1 2
第 3 行 1 2 2²
...
第 n 行 1 2 2² ... 2 ^{$n-1$}
A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
6. 一般地, 设 A 、 B 分别为函数 $y = f(x)$ 的定义域和值域, 如果由函数 $y = f(x)$ 可解得唯一的 $x = \varphi(y)$ 也是一个函数 (即对任意一个 $y \in B$, 都有唯一的 $x \in A$ 与之对应), 那么就称 $x = \varphi(y)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$. 在 $x = f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 是 y 的函数, 习惯上改写成 $y = f^{-1}(x)$ 的形式. 例如函数 $f(x) = 2x - 1$ 的反函数为 $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$. 设 $g(x) = \frac{4x}{x-1}$ ($x > 1$), 则函数 $h(x) = x + g^{-1}(x)$ 的值域为
A. $[8, +\infty)$ B. $(8, +\infty)$ C. $(\frac{1}{4}, +\infty)$ D. $[9, +\infty)$
7. 动点 M 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 从点 B_1 开始沿表面运动, 且与平面 A_1DC_1 的距离保持不变, 则动直线 A_1M 与平面 A_1DC_1 所成角正弦值的取值范围是
A. $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ C. $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$
8. 定义曲线 $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的“伴随曲线”. 在双曲线 $C_1: x^2 - y^2 = 1$ 的伴随曲线 C_2 上任取一点 P , 过 P 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足分别为 M 、 N , 则直线 MN 与曲线 C_1 的公共点的个数为
A. 0 B. 1 C. 2 D. 与点 P 的位置有关系

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 随机抽取 6 位影迷对电影《长津湖》的评分, 得到一组样本数据如下: 92, 93, 95, 95, 97, 98, 则下列关于该样本的说法中正确的有
A. 均值为 95 B. 极差为 6
C. 方差为 26 D. 第 80 百分位数为 97
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 对任意的整数 $n \geq 3$, 都有 $n^2 a_{n-2} a_{n+2} = (n^2 - 4)a_n^2$, 则下列说法中正确的有
A. 若 $a_2 = 2, a_4 = 2$, 则 $a_6 = 2$ B. 若 $a_1 = 1, a_3 = 3$, 则 $a_{2n+1} = 2n+1$ ($n \in N$)
C. 数列 $\{a_n\}$ 可以是等差数列 D. 数列 $\{a_n\}$ 可以是等比数列
11. 已知函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x| + \sin^4 2x$, 则
A. $f(x)$ 是偶函数 B. $f(x)$ 的最小正周期为 π
C. $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上为增函数 D. $f(x)$ 的最大值为 $1 + \sqrt{2}$
12. 设函数 $f(x)$ 为 R 上的奇函数, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, $f(2x+1) - f(2-2x) = 4x-1$, $f(1) = 1$, 则下列说法中一定正确的有
A. $f(2) = 2$ B. $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$
C. $f'(\frac{123}{2}) = 1$ D. $\sum_{i=1}^{59} f'(\frac{i}{20}) = 59$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

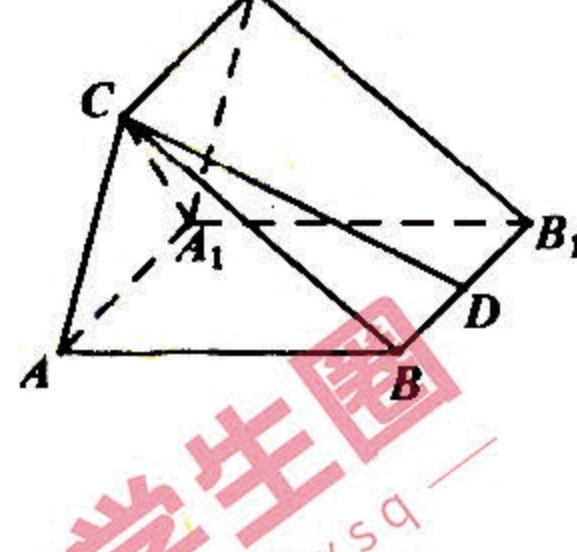
三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知圆 $C_1: (x+3)^2 + y^2 = 2$ 和抛物线 $C_2: y^2 = 4x$, 请写出与 C_1 和 C_2 都有且只有一个公共点的一条直线 l 的方程 _____ . (写出一条即可)
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4, B = \frac{\pi}{3}, A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ 的取值范围是 _____ .
15. 某同学在劳技课上设计了一个球形工艺品, 球的内部有两个内接正五棱锥, 两正五棱锥的底面重合, 若两正五棱锥的侧棱与底面所成的角分别为 α, β , 则 $\tan \alpha + \tan \beta$ 的最小值为 _____ .
16. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + cx + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $\frac{f(x_1)}{x_2}$ 的取值范围是 _____ .

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)
已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $4a_{n+1} = 3a_n - b_n + t, 4b_{n+1} = 3b_n - a_n - t, t \in R, n \in N^*$, 且 $a_1 = 1, b_1 = 0$.
(1) 求证: $\{a_n + b_n\}$ 是等比数列;
(2) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 求实数 t 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)
如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 四边形 ABB_1A_1 为正方形, 点 D 为棱 BB_1 的中点, 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 $ABB_1A_1, AA_1 \perp CD$.
(1) 求证: $CA = CA_1$;
(2) 若 $AC = AB = 2$, 求二面角 $C - A_1D - B_1$ 的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)
某中学对学生钻研奥数课程的情况进行调查, 将每周独立钻研奥数课程超过 6 小时的学生称为“奥数迷”, 否则称为“非奥数迷”, 从调查结果中随机抽取 100 人进行分析, 得到数据如表所示:

	奥数迷	非奥数迷	总计
男	24	36	60
女	12	28	40
总计	36	64	100

- (1) 判断是否有 99% 的把握认为是否为“奥数迷”与性别有关?
- (2) 现从抽取的“奥数迷”中, 按性别采用分层抽样的方法抽取 3 人参加奥数闯关比赛, 已知其中男、女学生独立闯关成功的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$, 在恰有两人闯关成功的条件下, 求有女生闯关成功的概率.

参考数据与公式:

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

20. (本小题满分 12 分)
在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线, 且 $AD = 2$.
(1) 若 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}, AB = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
(2) 若 $BD = 3$, 求边 AC 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)
在平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的动点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为点 $M, \overline{MQ} = 2\overline{MP}, OQ = 2$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 设直线 $l: y = kx + m$ 交 C 于不同的两点 A, B , 向量 $\vec{i} = (1, 0), \vec{j} = (0, 1)$, 是否存在常数 k , 使得满足 $\overline{OA} \cdot \vec{i} + 2\overline{OB} \cdot \vec{j} = 0$ 的实数 m 有无穷多解? 若存在, 请求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)
已知函数 $f(x) = e^x - e^a(a + \ln x)$.
(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调递增区间;
(2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.