# 湘豫名校联考
# 2023 年 2 月高三春季入学摸底考试
# 数学(理科)参考答案

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | A | C | A | C | B | D | A | A | C | D | C |

## 一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

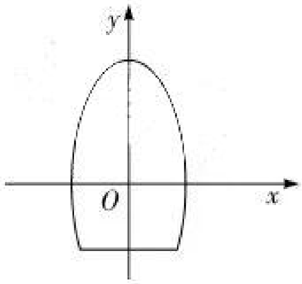
1. B 【解析】由题意得,集合 $A=\{y|y=\sin x,x\in\mathbf{R}\}=[-1,1]$,$B=\{x|x(x-3)<0\}=(0,3)$,故 $A\cap B=(0,1]$. 故选 B. 来源:高三答案公众号

2. A 【解析】因为 $z=\frac{3-\mathrm{i}}{4+5\mathrm{i}}=\frac{(3-\mathrm{i})(4-5\mathrm{i})}{(4+5\mathrm{i})(4-5\mathrm{i})}=\frac{7-19\mathrm{i}}{41}=\frac{7}{41}-\frac{19}{41}\mathrm{i}$,所以复数 $z$ 的共轭复数是 $\frac{7}{41}+\frac{19}{41}\mathrm{i}$. 故选 A.

3. C 【解析】根据题意,得 $\begin{cases}M=50,\\M\cdot \mathrm{e}^{10k}=200,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}M=50,\\\mathrm{e}^{10k}=4.\end{cases}$ 故 $F(x)=50\times 4^{\frac{1}{10}x}$. 当 $x=30$ 时,$F(30)=50\times 4^3=3\ 200$. 故选 C.

4. A 【解析】根据 $f(x)=\frac{2-4\sin^2 x}{2x^2+1}=\frac{2\cos 2x}{2x^2+1}$,得 $f(-x)=\frac{2\cos(-2x)}{2(-x)^2+1}=\frac{2\cos 2x}{2x^2+1}=f(x)$(或 $f(-x)=\frac{2-4\sin^2(-x)}{2(-x)^2+1}=\frac{2-4\sin^2 x}{2x^2+1}=f(x)$). 所以 $f(x)$ 为偶函数,排除 C;令 $x=0$,得 $f(0)=2$,排除 B;因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$,排除 D. 故选 A.

5. C 【解析】如图,建立平面直角坐标系. 设正视图的椭圆(部分)对应的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$,结合题意及三视图可得 $\begin{cases}a=8,\\b=3.\end{cases}$ 所以椭圆(部分)对应的标准方程为 $\frac{y^2}{64}+\frac{x^2}{9}=1$. 将点 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},y_0\right)$ 代入,可得 $y_0=\pm 4$. 故该椭球形状观鸟台的最高处到地面的垂直高度为 $8+4=12$(米). 故选 C.




6. B 【解析】输入 $k=1$,第一次循环:$1^2<1+10$,$k=1+1=2$,$n=0+1=1$;第二次循环:$2^2<2+10$,$k=2+1=3$,$n=1+1=2$;第三次循环:$3^2<3+10$,$k=3+1=4$,$n=2+1=3$;第四次循环:$4^2>4+10$,结束循环,此时 $k=4$,$n=3$. 所以输出 $n=3$. 故选 B.

7. D 【解析】由题可知,数列 $\{a_{n+1}-a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是以 $a_2-a_1=1$ 为首项,1 为公差的等差数列,所以 $a_{n+1}-a_n=1+(n-1)\times 1=n(n\in\mathbf{N}^*)$. 所以 $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1=1+2+\cdots+n$. 所以 $a_{n+1}-a_1=\frac{n(n+1)}{2}$. 所以 $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+2$. 故 $b_n=\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+2-2}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,所以数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$. 故选 D.

8. A 【解析】因为 $|AB|=\frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|=\sqrt{3}c$,所以 $|OA|=\frac{\sqrt{3}c}{2}$. 因为 $k_{AB}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\angle AOF_1=30^\circ$. 所以 $\cos\angle AOF_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 根据余弦定理,得 $|AF_1|=\sqrt{|OA|^2+|OF_1|^2-2|OA|\cdot|OF_1|\cos\angle AOF_1}=\sqrt{\frac{3}{4}c^2+c^2-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}c\times\frac{\sqrt{3}}{2}c}=\frac{1}{2}c$,$|AF_2|=\sqrt{|OA|^2+|OF_2|^2-2|OA|\cdot|OF_2|\cos\angle AOF_2}=\sqrt{\frac{3}{4}c^2+c^2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}c\times\frac{\sqrt{3}}{2}c}=\frac{\sqrt{13}}{2}c$. 所以

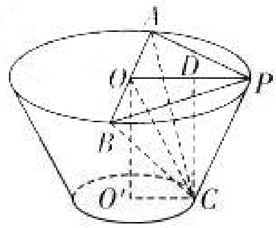
$|AF_2|-|AF_1|=\frac{\sqrt{13}}{2}c-\frac{1}{2}c=2a$. 故双曲线 $C$ 的离心率为 $e=\frac{4}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{3}$. 故选 A.

9. A 【解析】设 100 辆汽车中恰有 80 辆达到标准时的概率为 $f(p)$，则 $f(p)=C_{100}^{80}p^{80}(1-p)^{20}(0<p<1)$，则 $f'(p)=C_{100}^{80}p^{79}(1-p)^{19}(80-100p)$. 当 $p\in(0,0.8)$ 时，$f'(p)>0$，所以 $f(p)$ 在 $(0,0.8)$ 上单调递增；当 $p\in(0.8,1)$ 时，$f'(p)<0$，所以 $f(p)$ 在 $(0.8,1)$ 上单调递减. 所以 $f(p)$ 在 $p=0.8$ 处取得最大值. 所以 $P(X\geqslant 600)=P(X\leqslant 500)=1-P(X\geqslant 500)=1-0.8=0.2$. 故选 A.

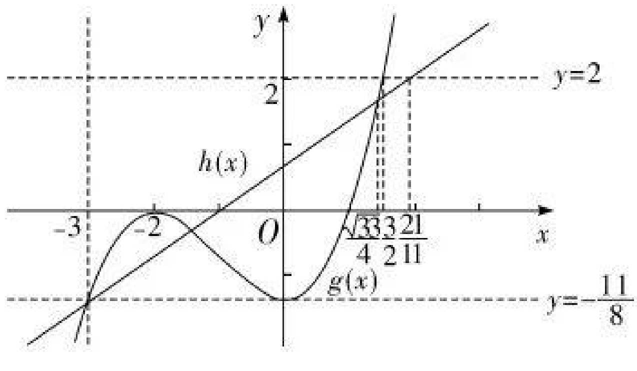
10. C 【解析】由题可得，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，即 $\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\frac{1}{2}BD\cdot c\sin\frac{\angle ABC}{2}+\frac{1}{2}BD\cdot a\sin\frac{\angle ABC}{2}$. 因为 $\sin\frac{\angle ABC}{2}\neq 0$，所以由二倍角公式可得 $2ac\cos\frac{\angle ABC}{2}=c+a$，即 $\cos\frac{\angle ABC}{2}=\frac{c+a}{2ac}$. 由余弦定理，得 $\cos\angle ABC=\frac{c^2+a^2-4}{2ac}$，所以 $2\left(\frac{c+a}{2ac}\right)^2-1=\frac{c^2+a^2-4}{2ac}$，整理可得 $(c+a)^2=ac[(c+a)^2-4]$. 所以 $(c+a)^2=ac[(c+a)^2-4]\leqslant\frac{(c+a)^2}{4}\cdot[(c+a)^2-4]$，即 $(c+a)^2\geqslant 8$，所以 $a+c\geqslant 2\sqrt{2}$（当且仅当 $a=c=\sqrt{2}$ 时，“=”成立）. 故 $\triangle ABC$ 周长的最小值为 $2+2\sqrt{2}$. 故选 C.

11. D 【解析】方法一：由题可得 $AB=8$. 因为 $AP=BP$，所以 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$. 过点 $A$ 向下底面做垂线，垂足为 $A_1$，则 $AA_1=\sqrt{PC^2-2^2}=\sqrt{20-4}=4$. 根据圆的性质，得 $CA_1=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，所以 $CA=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$，所以 $V_{C-ABP}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABP}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times 16\times 4=\frac{64}{3}$. 因为 $AC=BC=6$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 8\times\sqrt{36-16}=8\sqrt{5}$. 设点 $P$ 到平面 $ABC$ 的距离为 $d$，则 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot d=\frac{1}{3}\times 8\sqrt{5}d=\frac{64}{3}$，解得 $d=\frac{8\sqrt{5}}{5}$. 故 $PC$ 与平面 $ABC$ 所成的角的正弦值为 $\frac{d}{PC}=\frac{\frac{8\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$. 故选 D.

方法二：如图，设 $O$ 为上底面的圆心，因为 $AP=BP$，所以 $AB\perp OP$. 设 $O'$ 为下底面的圆心，所以 $AB\perp OO'$. 因为 $OP\cap OO'=O$，所以 $AB\perp$ 平面 $OO'P$. 因为 $O'C/\!/OP$，所以 $O'C\subset$ 平面 $OO'P$，所以 $AB\perp$ 平面 $POC$. 所以平面 $ABC\perp$ 平面 $POC$. 因为平面 $ABC\cap$ 平面 $POC=OC$，所以 $PC$ 与平面 $ABC$ 所成的角即为 $\angle PCO$. 过点 $C$ 作 $CD\perp OP$ 于点 $D$，因为 $OP=4$，$O'C=2$. 所以 $OD=DP=2$. 因为 $PC=2\sqrt{5}$，所以 $\sin\angle PCD=\frac{DP}{CP}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos\angle PCO=1-2\sin^2\angle PCD=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\angle PCO=\frac{4}{5}$. 故选 D.




12. C 【解析】设 $g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{11}{8}$，则 $g'(x)=x^2+2x=x(x+2)$. 令 $g'(x)<0$，得 $-2<x<0$；令 $g'(x)>0$，得 $x<-2$ 或 $x>0$. 故 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $(-2,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 所以 $g(-3)=-\frac{11}{8}$，$g(x)_{极小值}=g(0)=-\frac{11}{8}$，$g(x)_{极大值}=g(-2)=-\frac{1}{24}$，$g\left(\frac{3}{2}\right)=2$. 设 $h(x)=\frac{11}{16}(x+1)$，则 $h(-3)=-\frac{11}{8}$. 令 $h(x)=2$，得 $x=\frac{21}{11}$. 在同一平面直角坐标系中作出函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的图象，如图



所示，

联立$\begin{cases} y=\dfrac{11}{16}(x+1), \\ y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-\dfrac{11}{8}, \end{cases}$消去 $y$ 得$\dfrac{1}{3}x^3+x^2-\dfrac{11}{8}=\dfrac{11}{16}(x+1)$，化简得 $16x^3+48x^2-33x-99=0$. 整理得

$(16x^2-33)(x+3)=0$，解得 $x=-3$ 或 $x=-\dfrac{\sqrt{33}}{4}$ 或 $x=\dfrac{\sqrt{33}}{4}$. 若函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{11}{16}(x+1), -3\leqslant x\leqslant k, \\ \dfrac{1}{3}x^3+x^2-\dfrac{11}{8}, k<x\leqslant \dfrac{3}{2} \end{cases}$ 的

值域为$\left[-\dfrac{11}{8},2\right]$，由数形结合易知$-3\leqslant k\leqslant \dfrac{\sqrt{33}}{4}$. 故选 C.

## 二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

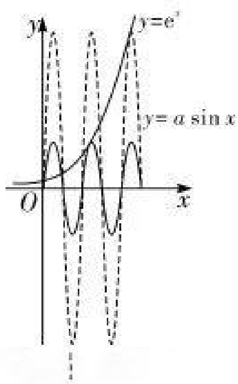
13. 4 【解析】因为 $x>0, y>0$，所以由基本不等式得 $4=\sqrt{x}+2\sqrt{y}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{y}}$，所以 $\sqrt{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{y}}\leqslant 2$，得 $\sqrt{xy}\leqslant 2$，所以 $xy\leqslant 4$，当且仅当 $x=4, y=1$ 时取等号. 所以 $xy$ 的最大值是 4.

14. 15 【解析】因为 $(2x^3+1)\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5=2x^3\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5+\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$，且$\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$的展开式为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot x^{5-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^r=C_5^r\cdot(-1)^r\cdot x^{5-3r}$，故 $x^2$ 的系数为 $2C_5^2\cdot(-1)^2+C_5^1\cdot(-1)^1=15$.

15. $-\dfrac{4}{3}$ 【解析】根据题意，$f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)\left(\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$. 因为 $\exists\theta\in\mathbf{R}$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(\theta)$，所以 $f(\theta)=f(x)_{\max}=\sqrt{5}$，所以 $\theta+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$. 所以 $\cos\theta=\sin\varphi$，$\sin\theta=\cos\varphi$，所以 $\tan\theta=\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=2$. 故 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\dfrac{4}{3}$.

16. $(\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}},\sqrt{2}e^{\frac{17\pi}{4}})$ 【解析】方法一：因为 $f(x)=e^x+a\cos x$，$g(x)=\sqrt{2}a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以由 $f(x)=g(x)$，得 $e^x=a\sin x$. 所以方程 $e^x=a\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有 4 个实数根. 因为 $a>0$，所以$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sin x}{e^x}$. 令 $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$. 令 $\varphi'(x)>0$，即 $\cos x>\sin x$，所以 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{9\pi}{4}+2k\pi\right), k\in\mathbf{N}$，所以 $\varphi(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{9\pi}{4}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{N}$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\right), k\in\mathbf{N}$. 因为 $a>0$，所以$\dfrac{1}{a}>0$. 因为 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{e^{\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}$，$\varphi\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin\frac{9\pi}{4}}{e^{\frac{9\pi}{4}}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{9\pi}{4}}}$，$\varphi\left(\dfrac{17\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin\frac{17\pi}{4}}{e^{\frac{17\pi}{4}}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{17\pi}{4}}}$，易知 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>\varphi\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)>\varphi\left(\dfrac{17\pi}{4}\right)$，所以$\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{17\pi}{4}}}<\dfrac{1}{a}<\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{9\pi}{4}}}$，即$\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}<a<\sqrt{2}e^{\frac{17\pi}{4}}$.

方法二：由题可得，方程 $f(x)=g(x)$，即 $e^x=a\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有 4 个实数根. 设 $F(x)=e^x$，$G(x)=a\sin x$，则函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的图象有且仅有 4 个交点. 如图为两个恰好不成立的临界位置. 设函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 相切于点 $(x_0,y_0)$，又 $F'(x)=e^x$，$G'(x)=a\cos x$，所以$\begin{cases} e^{x_0}=a\sin x_0, \\ e^{x_0}=a\cos x_0, \end{cases}$消去 $a$ 得 $\sin x_0=\cos x_0$. 因为 $e^{x_0}>0$，$a>0$，所以 $\sin x_0>0$，$\cos x_0>0$，所以 $x_0=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$. 由图观察知两种临界位置 $x_0$ 分别为 $k=2$ 时，$x_0=\dfrac{9\pi}{4}$；$k=4$ 时，$x_0=\dfrac{17\pi}{4}$. 此两种情况对应的 $a$ 值分别为 $a_1$



$=\dfrac{e^{\frac{9\pi}{4}}}{\sin\dfrac{9\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$，$a_2=\dfrac{e^{\frac{17\pi}{4}}}{\sin\dfrac{17\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{17\pi}{4}}$，所以$\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}<a<\sqrt{2}e^{\frac{17\pi}{4}}$.

**三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.**

**（一）必考题：共 60 分.**

17.【解析】(1)因为 $S_{n+1}=S_n+2S_{n-1}(n\geqslant 2)$，所以 $S_{n+1}+S_n=2(S_n+S_{n-1})(n\geqslant 2)$.

因为 $a_1=1$，$a_2=1$，所以 $S_1=1$，$S_2=2$，$S_1+S_2=3$.

所以数列$\{S_{n+1}+S_n\}$是首项为 3，公比为 2 的等比数列. ………………………………………… 2 分

所以 $S_{n+1}+S_n=3\times 2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，整理可得 $S_{n+1}+S_n=2^n+2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $S_{n+1}-2^n=-(S_n-2^{n-1})$，$n\in\mathbf{N}^*$.

所以 $S_n-2^{n-1}=(-1)^{n-1}(S_1-2^0)$. ………………………………………… 4 分

又 $S_1-2^0=0$，故 $S_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$. ………………………………………… 5 分

(2)因为 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}-2^{n-2}=2^{n-2}(n\geqslant 2)$，又 $a_1=1$，

所以 $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ 2^{n-2}, n\geqslant 2.\end{cases}$ 所以 $b_n=na_n=\begin{cases}1, n=1,\\ n\cdot 2^{n-2}, n\geqslant 2.\end{cases}$ ………………………………………… 7 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=1+2\times 2^0+3\times 2^1+4\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-2}$，

$2T_n=1\times 2+2\times 2^1+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+n\times 2^{n-1}$，………………………………………… 8 分

所以 $-T_n=1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-2}-n\times 2^{n-1}$ ………………………………………… 9 分

$=\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2}-n\cdot 2^{n-1}=(1-n)\cdot 2^{n-1}-1$. ………………………………………… 10 分

所以 $T_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}+1$.

又 $T_1=1\times a_1=1$ 满足上式，所以 $T_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}+1$，$n\in\mathbf{N}^*$. ………………………………………… 12 分

18.【解析】(1)由图表可知，非“重度沉迷”的抖音用户男性有：$20+25=45$(人)，“重度沉迷”的抖音用户男性有：6 人；

非“重度沉迷”的抖音用户女性有：$20+15=35$(人)，“重度沉迷”的抖音用户女性有：14 人. ………… 2 分

填写列联表如下：

| | 非“重度沉迷” | “重度沉迷” | 合计 |
|---|---|---|---|
| 人数(男) | 45 | 6 | 51 |
| 人数(女) | 35 | 14 | 49 |
| 合计 | 80 | 20 | 100 |

………………………………………… 4 分

根据列联表中的数据计算可得 $K^2=\dfrac{100\times(45\times 14-35\times 6)^2}{80\times 20\times 49\times 51}\approx 4.412>3.841$，

因此有 95%的把握认为性别与是否为“重度沉迷”刷抖音有关系. ………………………………………… 6 分

(2)由表可知：“重度沉迷”的抖音用户有 $6+14=20$(人)，“中度沉迷”的抖音用户有 $25+15=40$(人)，“轻度沉迷”的抖音用户有 $20+20=40$(人).

抽取的“重度沉迷”“中度沉迷”与“轻度沉迷”的抖音用户分别有 $\dfrac{20}{100}\times 20=4$(人)，$\dfrac{40}{100}\times 20=8$(人)，$\dfrac{40}{100}\times 20=8$(人)，………………………………………… 8 分

$X$ 的所有可能取值为 100，150，200，250，300，

则 $P(X=100)=\frac{C_4^2}{C_{20}^2}=\frac{6}{190}$；$P(X=150)=\frac{C_4^1\cdot C_8^1}{C_{20}^2}=\frac{32}{190}$；$P(X=200)=\frac{C_8^2+C_4^1\cdot C_8^1}{C_{20}^2}=\frac{60}{190}$；$P(X=250)=\frac{C_8^1\cdot C_8^1}{C_{20}^2}=\frac{64}{190}$；$P(X=300)=\frac{C_8^2}{C_{20}^2}=\frac{28}{190}$. ……………………………………………… 10 分

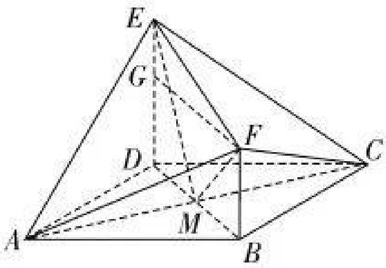
所以 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{6}{190}$ | $\frac{32}{190}$ | $\frac{60}{190}$ | $\frac{64}{190}$ | $\frac{28}{190}$ |

故购书券总和 $X$ 的数学期望为 $E(X)=100\times\frac{6}{190}+150\times\frac{32}{190}+200\times\frac{60}{190}+250\times\frac{64}{190}+300\times\frac{28}{190}=220$.

……………………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)方法一：存在，且 $\lambda=\frac{1}{4}$，理由如下：



因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AB=AD$，$BD$ 与 $AC$ 互相垂直且平分.

因为 $\angle ADC=120^\circ$，所以 $\angle BAD=60^\circ$. 所以三角形 $ABD$ 是等边三角形.

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $ED\perp AC$，$ED\perp BD$.

因为 $ED\cap BD=D$，$ED\subset$ 平面 $BDEF$，$BD\subset$ 平面 $BDEF$，所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$.

又 $EM\subset$ 平面 $BDEF$，所以 $AC\perp EM$. ……………………………………………… 2 分

过点 $F$ 作 $FG\perp DE$ 于点 $G$，易得四边形 $BDGF$ 为矩形.

设 $AB=ED=\frac{1}{\lambda}FB=2a$，则 $BD=FG=2a$，$BM=DM=\frac{1}{2}BD=a$.

因为 $FB/\!/ED$，所以 $FB\perp BD$. 所以 $EM^2=DE^2+DM^2=5a^2$，$EF^2=GF^2+GE^2=4a^2+(2a-2\lambda a)^2$，$FM^2=BF^2+BM^2=a^2+4\lambda^2a^2$. ……………………………………………… 4 分

欲使 $EM\perp$ 平面 $AFC$，只需 $EM\perp MF$. ……………………………………………… 5 分

即 $EM^2+FM^2=EF^2$，所以 $5a^2+a^2+4\lambda^2a^2=4a^2+(2a-2\lambda a)^2$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$.

所以存在实数 $\lambda$，使得 $EM\perp$ 平面 $AFC$，且 $\lambda=\frac{1}{4}$. ……………………………………………… 6 分

方法二：存在，且 $\lambda=\frac{1}{4}$，理由如下：

若 $EM\perp$ 平面 $AFC$，又 $MF\subset$ 平面 $AFC$，

所以 $EM\perp MF$，即 $\angle DME+\angle BMF=\frac{\pi}{2}$. ……………………………………………… 1 分

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB/\!/ED$，所以 $FB\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $ED\perp BD$，$FB\perp BD$.

所以 $\angle MFB+\angle BMF=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle MFB=\angle DME$. ……………………………………………… 3 分

所以 $\mathrm{Rt}\triangle MFB\backsim\mathrm{Rt}\triangle EMD$，

故 $\frac{DM}{BF}=\frac{DE}{BM}$，即 $DM\cdot BM=BF\cdot DE=\lambda DE^2$. ……………………………………………… 4 分

在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ADM=60^\circ$，所以 $DM=BM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}DE$.

所以 $\lambda=\dfrac{DM^2}{DE^2}=\dfrac{1}{4}$.

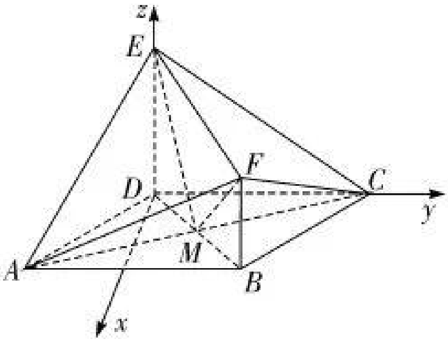
因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AB=AD$，$BD$ 与 $AC$ 互相垂直且平分.

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $ED\perp AC$.

因为 $ED\cap BD=D$，$ED\subset$ 平面 $BDEF$，$BD\subset$ 平面 $BDEF$，所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$.

又 $EM\subset$ 平面 $BDEF$，所以 $AC\perp EM$.

因此，$\lambda=\dfrac{1}{4}$ 时，$EM\perp$ 平面 $AFC$. …………………………………… 6 分




(2)方法一：如图，以 $D$ 为原点，$AB$ 边上的垂直平分线所在直线为 $x$ 轴，$DC$ 所在直线为 $y$ 轴，$DE$ 所在直线为 $z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AB=ED=2FB=2a$，则 $D(0,0,0)$，$E(0,0,2a)$，$A(\sqrt{3}a,-a,0)$，$B(\sqrt{3}a,a,0)$，$F(\sqrt{3}a,a,a)$，$C(0,2a,0)$，所以 $\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3}a,a,2a)$，$\overrightarrow{EF}=(\sqrt{3}a,a,-a)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-2a,2a)$.

…………………………………… 7 分

设平面 $AEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y+2z=0,\\ \sqrt{3}x+y-z=0.\end{cases}$

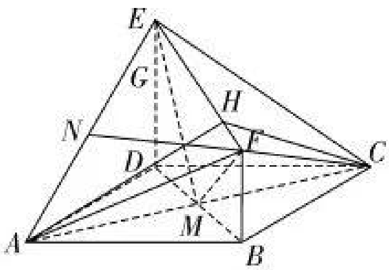
解得 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}y,\\ z=-2y,\end{cases}$ 令 $y=1$，则平面 $AEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,-2)$. …………………… 9 分

设平面 $CEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-2y'+2z'=0,\\ \sqrt{3}x'+y'-z'=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x'=0,\\ z'=y'.\end{cases}$ 令 $y'=1$，得平面 $CEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$. …………………… 10 分

设锐二面角的平面角为 $\theta$，则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4}$.

故平面 $AEF$ 与平面 $CEF$ 所成的锐二面角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$. …………………… 12 分




方法二：不妨设 $DE=AB=2$，则 $BF=1$.

如图，作 $AH\perp EF$，垂足为 $H$，连接 $CH$.

易得 $\triangle AEF\cong\triangle CEF$，所以 $CH\perp EF$.

所以 $\angle AHC$ 为平面 $AEF$ 与平面 $CEF$ 所成角的平面角. ……… 8 分

在梯形 $BDEF$ 中，$DE\perp BD$，所以 $EF=\sqrt{(DE-BF)^2+BD^2}=\sqrt{5}$.

又 $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=2\sqrt{2}$，$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}$，

所以 $\triangle AEF$ 为等腰三角形. …………………………………… 9 分

作 $FN\perp AE$，垂足为 $N$，则 $FN=\sqrt{AF^2-\dfrac{AE^2}{4}}=\sqrt{3}$.

在 $\triangle AEF$ 中，$AE\cdot FN=AH\cdot EF$，所以 $AH=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$. …………………… 10 分

又 $AC=2\sqrt{AD^2-DM^2}=2\sqrt{3}$，$CH=AH=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$，

所以在 $\triangle AHC$ 中，$\cos\angle AHC=\dfrac{AH^2+CH^2-AC^2}{2AH\cdot CH}=-\dfrac{1}{4}$. …………………… 11 分

所以平面 $AEF$ 与平面 $CEF$ 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$. …………………… 12 分

20.【解析】(1)因为 $C_2$ 的焦点坐标分别为 $(-1,0)$，$(1,0)$，所以 $\frac{p}{2}=1$，$p=2$.

即抛物线的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………………………………… 1 分

根据抛物线的定义，得 $t+1=2$，所以 $t=1$，$s=2$，

故 $M(1,2)$. 所以直线 $MA$，$MB$ 关于直线 $x=1$ 对称，即两直线的斜率之和为 0. ………………………… 2 分

设直线 $MA$，$MB$ 的方程分别为 $y-2=k(x-1)$ 和 $y-2=-k(x-1)$（$k\neq0$，且存在），

联立方程 $\begin{cases}y^2=4x,\\y-2=k(x-1),\end{cases}$ 可得 $y^2-\frac{4}{k}y+\frac{8}{k}-4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+2=\frac{4}{k}$，$2y_1=\frac{8}{k}-4$. ………………………………………… 3 分

所以 $y_1=\frac{4}{k}-2$ 代入 $y^2=4x$，得点 $A$ 的坐标为 $\left[\frac{\left(\frac{4}{k}-2\right)^2}{4},\frac{4}{k}-2\right]$. ……………………………………… 4 分

同理可得点 $B$ 的坐标为 $\left[\frac{\left(-\frac{4}{k}-2\right)^2}{4},-\frac{4}{k}-2\right]$. ……………………………………………………… 5 分

所以 $k_{AB}=\dfrac{\frac{4}{k}-2-\left(-\frac{4}{k}-2\right)}{\frac{\left(\frac{4}{k}-2\right)^2}{4}-\frac{\left(-\frac{4}{k}-2\right)^2}{4}}=\dfrac{\frac{8}{k}}{\frac{-\frac{32}{k}}{4}}=-1$，即直线 $AB$ 的斜率为定值. ………………………… 6 分

(2)方法一：设椭圆 $C_2$ 上关于直线 $AB$ 对称的两点为 $P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，$PQ$ 的中点为 $D(x_0,y_0)$，直线 $AB$ 的方程为 $y=-x+m$，直线 $PQ$ 的方程为 $y=x+b$.

联立方程 $\begin{cases}x^2+2y^2=2,\\y=x+b,\end{cases}$ 可得 $3x^2+4bx+2b^2-2=0$.

$\Delta=16b^2-12(2b^2-2)>0$，所以 $b^2<3$，所以 $x_3+x_4=-\frac{4}{3}b$. ……………………………………………… 8 分

故 $x_0=\frac{x_3+x_4}{2}=-\frac{2}{3}b$，$y_0=-\frac{2}{3}b+b=\frac{1}{3}b$.

代入 $y=-x+m$，可得 $b=-3m$， ……………………………………………………………………… 10 分

所以 $(-3m)^2<3$，所以 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为原点到直线 $AB$ 的距离为 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}$，所以 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}\in\left[0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

所以原点到直线 $AB$ 的距离的取值范围是 $\left[0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. ……………………………………………… 12 分

方法二：设椭圆 $C_2$ 上关于直线 $AB$ 对称的两点为 $P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，$PQ$ 的中点为 $D(x_0,y_0)$.

因为 $k_{PQ}\cdot k_{AB}=-1$，所以 $k_{PQ}=1$. ……………………………………………………………………… 7 分

又 $\frac{x_3^2}{2}+y_3^2=1$，$\frac{x_4^2}{2}+y_4^2=1$，

两式相减，得 $\frac{(x_3+x_4)(x_3-x_4)}{2}+(y_3+y_4)(y_3-y_4)=0$，

所以 $x_3+x_4+2k_{PQ}(y_3+y_4)=0$，即 $x_0+2y_0=0$①. ……………………………………………………… 9 分

设直线 $AB$ 的方程为 $x+y=m$，则 $x_0+y_0=m$②.

由①②可得，$y_0=-m$，$x_0=2m$. ……………………………………………………………………………… 10 分

又因为点 $D$ 在椭圆内，所以 $\frac{(2m)^2}{2}+(-m)^2<1$，所以 $|m|<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以原点到直线 $AB$ 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}\in\left[0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

所以原点到直线 $AB$ 的距离的取值范围为 $\left[0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. ………………………… 12 分

21.【解析】(1)因为 $f(x)=x(2\ln x-1)$,所以 $f'(x)=2\ln x+1$. ………………………… 1 分

所以曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 $f'(1)=1$. ………………………… 2 分

又 $f(1)=-1$,故曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y+1=x-1$,即 $x-y-2=0$. ………… 3 分

(2)方法一:$h(x)=f(x)+a(1-\ln x)=x(2\ln x-1)+a(1-\ln x)=(2x-a)\ln x-x+a$.

当 $a=0$ 时,$h(x)=2x\ln x-x$,$h'(x)=2\ln x+2-1=2\ln x+1$.

令 $h'(x)=0$,则 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$. 当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时,$h'(x)<0$,所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上单调递减;当 $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时,$h'(x)>0$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 上单调递增. ………………………… 4 分

所以 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{2}{\sqrt{e}}\ln\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{\sqrt{e}}=-\frac{2}{\sqrt{e}}$ 且 $h(x)\geqslant h\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时,$\ln x<-\frac{1}{2}$,$2\ln x-1<-2$,故 $h(x)<0$.

因为 $h(\sqrt{e})=2\sqrt{e}\ln\sqrt{e}-\sqrt{e}=0$,$h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $h(x)$ 只有一个零点 $x=\sqrt{e}$,不符合题意. ………………………… 5 分

当 $a<0$ 时,$h(x)=(2x-a)\left(\ln x-\frac{x-a}{2x-a}\right)$,$x>0$.

令 $m(x)=\ln x-\frac{x-a}{2x-a}$,由题意可知,$h(x)$ 有两个零点等价于 $m(x)$ 在 $x>0$ 上有两个零点.

因为 $m'(x)=\frac{(4x-a)(x-a)}{x(2x-a)^2}>0$,所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$m(x)$ 最多有一个零点,不符合题意;
………………………… 6 分

当 $a>0$ 时,$h\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}\neq 0$,此时 $x=\frac{a}{2}$ 不是 $h(x)$ 的零点,

$h(x)=(2x-a)\left(\ln x-\frac{x-a}{2x-a}\right)$,$x>0$ 且 $x\neq\frac{a}{2}$,

令 $m(x)=\ln x-\frac{x-a}{2x-a}$,由题意可知,$h(x)$ 有两个零点等价于 $m(x)$ 在 $x>0$ 且 $x\neq\frac{a}{2}$ 时有两个零点.

令 $m'(x)=0$,解得 $x=\frac{a}{4}$ 或 $x=a$,

当 $x\in\left(0,\frac{a}{4}\right)$ 或 $x\in(a,+\infty)$ 时,$m'(x)>0$,$m(x)$ 单调递增;

当 $x\in\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2}\right)$ 或 $x\in\left(\frac{a}{2},a\right)$ 时,$m'(x)<0$,$m(x)$ 单调递减,

所以 $m(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上的最大值为 $m\left(\frac{a}{4}\right)=\ln\frac{a}{4}-\frac{3}{2}$,$m(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上的最小值为 $m(a)=\ln a$.

若 $m\left(\frac{a}{4}\right)\leqslant 0$ 且 $m(a)\geqslant 0$,则 $m(x)$ 至多有一个零点,不符合题意. ………………………… 8 分

所以 $m\left(\frac{a}{4}\right)>0$ 或 $m(a)<0$,即 $a\in(0,1)\cup(4e^{\frac{3}{2}},+\infty)$.

当 $a\in(0,1)$ 时,$m\left(\frac{a}{4}\right)=\ln\frac{a}{4}-\frac{3}{2}<\ln\frac{1}{4}-\frac{3}{2}<0$,$m(a)=\ln a<0$,

又当 $x$ 从大于 $\frac{a}{2}$ 的方向逼近 $\frac{a}{2}$ 时，$m(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$m(x)\to+\infty$，此时 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 且 $x\neq\frac{a}{2}$ 上有两个零点. ………………………………………… 10 分

当 $a\in(4e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 时，$m\left(\frac{a}{4}\right)=\ln\frac{a}{4}-\frac{3}{2}>0$，$m(a)=\ln a>0$，

又当 $x$ 从大于 0 的方向逼近 0 时，$m(x)\to-\infty$，当 $x$ 从小于 $\frac{a}{2}$ 的方向逼近 $\frac{a}{2}$ 时，$m(x)\to-\infty$，此时 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 且 $x\neq\frac{a}{2}$ 上有两个零点.

综上所述，实数 $a$ 的取值范围为 $(0,1)\cup(4e^{\frac{3}{2}},+\infty)$. ………………………………………… 12 分

方法二：$h(x)=f(x)+a(1-\ln x)=x(2\ln x-1)+a(1-\ln x)$，函数 $h(x)$ 有两个零点等价于方程 $x(2\ln x-1)+a(1-\ln x)=0$ 有两个不相同的实数根. ………………………………………… 4 分

因为 $x=e$ 不是该方程的实数根，所以 $a=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln x-1}$. …………… 5 分

令 $g(x)=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln x-1}$ $(x>0$ 且 $x\neq e)$，则直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有两个不同的交点. ………………………………………… 6 分

因为 $g'(x)=\frac{2\ln x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)}{(\ln x-1)^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=e^{\frac{3}{2}}$ 或 $x=1$.

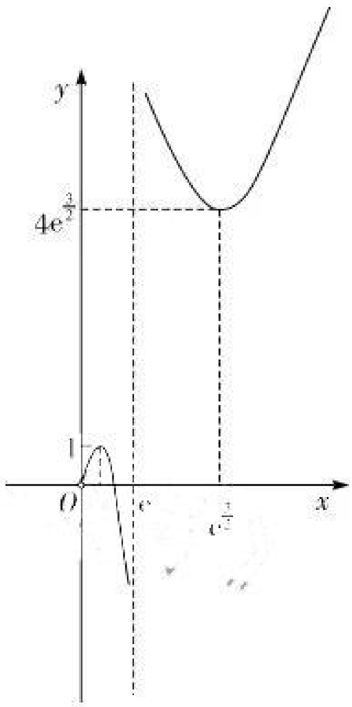
当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(1,e)\cup(e,e^{\frac{3}{2}})$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$，$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,e)$，$(e,e^{\frac{3}{2}})$ 上单调递减. ………………………………………… 8 分

又当 $x\to0^+$ 时，$g(x)\to0$，$g(1)=1$，$g(e^{\frac{3}{2}})=4e^{\frac{3}{2}}$，当 $x\to e^-$ 时，$g(x)\to-\infty$；

当 $x\to e^+$ 时，$g(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$. …………… 9 分

$g(x)$ 的大致图象如图所示， ………………………………………… 10 分




所以由图可得，当 $0<a<1$ 或 $a>4e^{\frac{3}{2}}$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有两个不同的交点，即函数 $h(x)$ 有两个零点.

故实数 $a$ 的取值范围为 $(0,1)\cup(4e^{\frac{3}{2}},+\infty)$. ………………………………………… 12 分

**(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.**

22.【解析】(1) 由 $\begin{cases}y=t,\\x=2(t-2\sqrt{2}),\end{cases}$ 得 $x=2(y-2\sqrt{2})$，所以 $x-2y+4\sqrt{2}=0$.

故直线 $l$ 的普通方程是 $x-2y+4\sqrt{2}=0$. ………………………………………… 2 分

由 $\rho^2(1+3\sin^2\theta)=1$，得 $\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta=1$，来源：高三答案公众号

代入公式 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2+3y^2=1$，所以 $x^2+4y^2=1$，即 $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

故曲线 $C$ 的直角坐标方程是 $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$. ………………………………………… 4 分

(2)方法一：由 $\theta=\beta$(其中 $\beta\in(0,\pi)$，且 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$，$\rho\geqslant0$)，得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………… 5 分

现将射线 $\theta=\beta(\rho\geqslant0)$ 代入曲线 $C$ 的极坐标方程，可得 $\rho_M^2=\frac{1}{1+3\sin^2\beta}=\frac{1}{1+3\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{5}{8}$，

所以 $\rho_M=\frac{\sqrt{10}}{4}$. ……………… 7 分

又直线 $l$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+4\sqrt{2}=0$，……………… 8 分

现将 $\theta=\beta(\rho\geqslant0)$ 代入直线 $l$ 的极坐标方程，可得 $\rho_N=\frac{4\sqrt{2}}{2\sin\beta-\cos\beta}=\frac{4\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}=\sqrt{10}$. …… 9 分

所以 $|MN|=\rho_N-\rho_M=\sqrt{10}-\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$. ……………… 10 分

方法二：由题可得射线 $\theta=\beta$(其中 $\beta\in(0,\pi)$，且 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$，$\rho\geqslant0$)的直角坐标方程为 $y=-\frac{1}{2}x(x\leqslant0)$.

联立 $\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1,\\ y=-\frac{1}{2}x(x\leqslant0),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ y=\frac{\sqrt{2}}{4},\end{cases}$ 则点 $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. ……………… 6 分

联立 $\begin{cases}x-2y+4\sqrt{2}=0,\\ y=-\frac{1}{2}x(x\leqslant0),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2},\\ y=\sqrt{2},\end{cases}$ 则点 $N(-2\sqrt{2},\sqrt{2})$. ……………… 8 分

所以 $|MN|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$. ……………… 10 分

23.【解析】(1)由已知可得

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4-2ab\geqslant4-2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=2$，

当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立. ……………… 5 分

(2)因为 $a+b=2$，所以 $(b+2)+a=4$，所以 $\frac{1}{2|a|}=\frac{1}{2|a|}\cdot\frac{a+(b+2)}{4}=\frac{a}{8|a|}+\frac{b+2}{8|a|}$. ……………… 6 分

所以原式 $=\frac{a}{8|a|}+\frac{b+2}{8|a|}+\frac{|a|}{2(b+2)}\geqslant\frac{a}{8|a|}+2\sqrt{\frac{b+2}{8|a|}\cdot\frac{|a|}{2(b+2)}}=\frac{a}{8|a|}+\frac{1}{2}$. ……………… 8 分

当且仅当 $\frac{b+2}{8|a|}=\frac{|a|}{2(b+2)}$，即 $a=-4,b=6$，或 $a=\frac{4}{3},b=\frac{2}{3}$ 时，等号成立.

因为 $a<0$ 时，$\left(\frac{a}{8|a|}\right)_{\min}=-\frac{1}{8}$，所以 $\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{2(b+2)}$ 的最小值为 $\frac{3}{8}$. ……………… 10 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线