第42届全国中学生物理竞赛复赛试题

（2025 年 9 月 20 日上午 9:00-12:00）

考生须知

1、 考生考试前务必认真阅读本须知。

2、 本试题共 7 道题，5 页，总分为 320 分。

3、 如遇试题印刷不清楚的情况，请务必及时向监考老师提出。

4、 需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸上；写在试题纸和草稿纸上的解答一律不给分。

一. （45 分）一磁光陷阱中约束的N个原子构成的原子气处于绝对温度为T的平衡态。在位置$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$、速度为$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$的原子数密度$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$服从玻尔兹曼分布

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\propto\exp\left[-\frac{m(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2)}{2k_{\mathrm{B}}T}\right]\exp\left[-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2k_{\mathrm{B}}T}\right]$$

其中ω_i为$i(i=x,y,z)$方向上陷阱对原子气的约束强度，m为原子质量，k_{B}为玻尔兹曼常量，T 为绝对温度。取竖直向下为z轴正方向。在陷阱正下方$z=h$（$h>0$)处有一探测器，可测量$z=h$平面附近的原子的纵向数密度（即此平面附近z方向单位高度内的原子数）和通过该平面的原子流（即单位时间由上至下通过该平面的净原子数)。重力加速度大小为g，忽略原子间的碰撞。在$t=0$时将陷阱撤除。

（1） 求陷阱撤除前，平衡态下完整的分布函数$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$；

（2） 求某$t>0$时刻，在$z=h$平面附近的原子的纵向数密度$n(t)$，以及通过该平面的原子流$I(t)$；

（3） 在原子气温度极低、约束很强的条件下，可通过测量$n(t)$的最大值所对应的时间t_n或者$I(t)$的最大值所对应的时间t_I求得温度T. 在温度极低、约束很强的极限下，求t_n和t_I的表达式（准确到温度的非零的最低阶)。

（4） 在原子气温度极低、约束很强的极限下，在$t=t_n$附近，$n(t)\approx n_0\exp\left[-\frac{(t-t_n)^2}{2\sigma_t^2}\right]$，其中$n_0$为与$t$无关的量，$\sigma_t$是上述（高斯）分布函数的有效展宽。实验上若测得此有效展宽，可用来估计温度T. 求σ_t的表达式（准确到温度的非零的最低阶)。

提示：$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$。

二.（45 分）重离子束探针是目前唯一可直接测量磁约束聚变等离子体芯部电势的仪器，其测量原理如图 2a 所示：向等离子体入射的一束重离子束中，每个离子的电荷量为$q_1=e$（e为元电荷的电荷量，$e>0$），初始入射动能为K_1；在等离子体内该重离子束中的离子直接电离产生电荷量为$q_2=2e$的二次离子；在某个位置产生的二次离子束在外部磁场的偏转下离开等离子体，恰好被能量分析器接收；能量分析器可以测量二次离子束进入狭缝的动能K_2. 已知电势在等离子体外均为零。相对论效应可忽略。

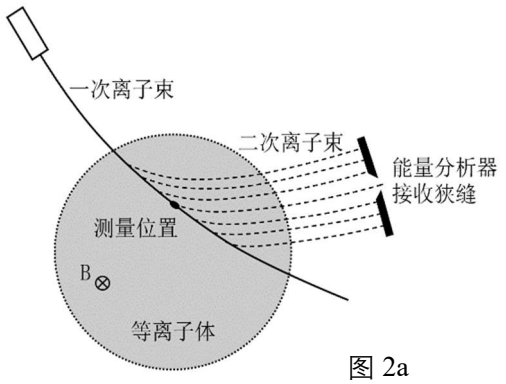

图 2a

重离子束探针中常用的能量分析器是普罗卡-格林平行板能量分析器，其结构简图如图 2b 所示：两平行电极板间距为d，上电极板电压为V_A，下电极板电压为 0；在能量分析器中二次离子束经过的各区域中，仅两平行板之间存在均匀电场，其余空间不存在电场或磁场。假设二次离子束的速度平行于纸面。

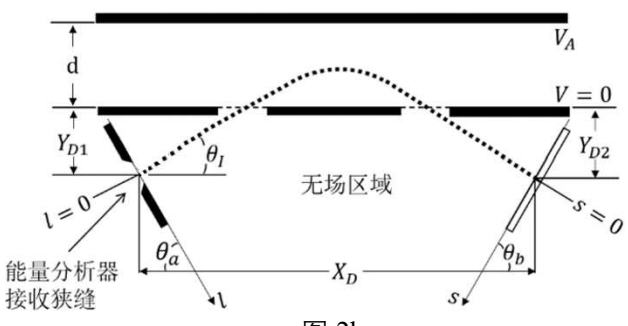

图 2b

（1）一离子束在距离下电极板Y_{D1}处（入射板狭缝中心）入射，入射角为θ_I，在距离下电极板Y_{D2}处被一接收板（狭

缝中心）接收，其被接收时距离入射点的水平距离为X_{D}.

（1.1）试写出 X_D 的表达式。

（1.2）为了减小入射角度细微偏差对测量结果的影响，要求入射角满足二级聚焦条件，即当入射角发生极小变化$\Delta\theta$时，X_D的变化是一个与$(\Delta\theta)^3$同阶的量。试确定满足二级聚焦条件的入射角θ_I（θ_I在$0\sim\frac{\pi}{2}$之间），并给出X_D和V_A的表达式。

（1.3）若能量分析器已经根据上面的二级聚焦条件放置，入射板和接收板与水平方向的夹角分别为θ_a和θ_b，某二次束离子在入射到能量分析器时其与狭缝中心的距离为l, 求其在接收板平面上距接收板中心的距离s (l,s大于零表示在下半平面，小于零表示在上半平面)。

（2）工程安装误差和入射束动能K_2的波动会导致能量分析器并不严格满足二级聚焦条件。已知入射板的缝宽为w.

（2.1）求这时$l=0$对应的s的表达式。

（2.2）假设进入狭缝的离子都能被接收板捕获，从入射狭缝各位置入射的二次离子束的密度、动能、速度方向均相同，若上半平面接收到的二次离子束电流为i_U，下半平面接收到的二次离子束电流为i_L，试用i_U、i_L以及能量分析器各硬件参数表示K_2.

（2.3）在图 2a 中的测量位置（即二次离子束产生的位置）的直接电离过程（即一次离子（以 Tl^+ 为例）电离产生二次离子 Tl^{++} 的过程）可简化为

$$\mathrm{Tl}^+\ (\text{极高能})+\mathrm{e}^-\ (\text{低能})\rightarrow \mathrm{Tl}^+\ (\text{极高能})+\mathrm{e}^-\ (\text{次级高能})\ \rightarrow \mathrm{Tl}^{++}\ (\text{极高能})+\mathrm{e}'^-(\text{次级高能})+\mathrm{e}''^-\ (\text{逸出})$$

其中 e^-、e'^- 和 e''^- 分别表示电离前的电子、电离后的次级高能电子和逸出电子。电离前后的能量是守恒的。第二步中间过程中的次级高能电子与极高能一次离子碰撞，使其电离成二次离子。电离能和电子的动能均远小于一次束离子的动能，没有其它碰撞过程。忽略一次束离子从初始位置到测量位置、二次束离子从测量位置到能量分析器的运动过程中的能量衰减，求测量位置处的电势Φ（极高）。

三.（45 分） 一量子霍尔效应器件的俯视图如图 3a 所示，其中 1 至 8 为器件端口，可以通电流或测电压，垂直于器件方向上施加磁场 B. 由于量子霍尔效应，在两端口i,j通电流I后，在另外两端口l,m（取任意两个不相邻的两端口i,j通电流，在连接端口i,j的直线段的一侧取端口l，另一侧取端口m）之间可以测到电压差U_{lm}，进而可以得到相应的量子霍尔电阻 $R_{i,j;l,m}=U_{lm}/I$。

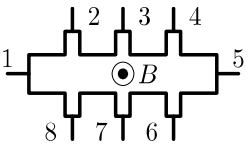

图 3a

图 3a 中的器件可等效为图 3b 所示的含电源的电路：电路中的I_i是流入端口i的电流（电流为流出时，I_i要改变符号）；$r=R_{\mathrm{H}}/2$为每个端口的固有电阻，r 为已知量；每一电源旁的量表示相应电源的电动势的值，且所有电源均无内阻；$R_{\mathrm{c}i}$是端口i因接入电路而产生的接触电阻，各端口接触电阻不一定相同，但它们与r的比值均为同一远小于 1 的量级ϵ（约 0.1%量级），即$\epsilon_i\equiv R_{ci}/r\sim\epsilon\ll 1$。

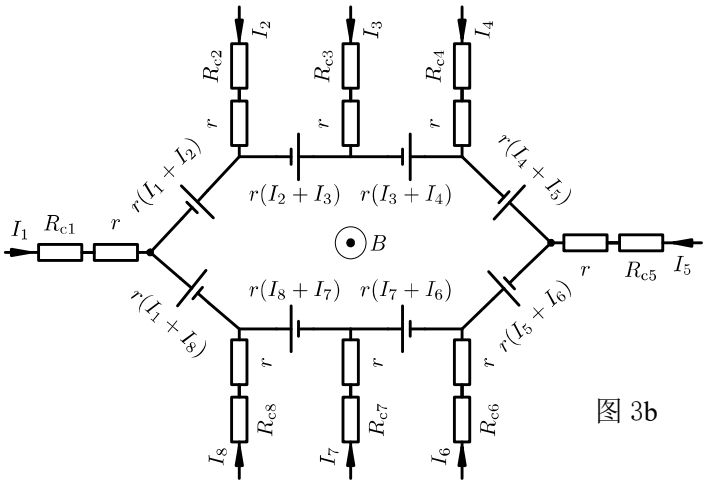

图 3b

（1）在等效电路图 3b 中分别在哪两个端口接通电流、哪两个端口测量电压，可以得到与接触电阻R_{ci}无关的霍尔电阻？至少对一种接法证明你的结论。

（2） 现将两个图 3a 所示的器件 a、b 连为一个系统，每个器件仍分别等效为图 3b。器件 a、b 的端口分别标记为 1a 至 8a 和 1b 至 8b，已知相应端口的接触电阻分别为R_{cia}和$R_{cib}(i=1,\ldots,8)$。除各端口的接触电阻可能不同外，两器件其它性质相同。

（2.1）当器件 a、b 的连接方式如图 3c 所示时，求把端口 7a 和 3b 之间断路时系统的霍尔电阻$R_{1a,5b;3a,7b}$，以及把端口 7a 和 3b 之间连通时系统的霍尔电阻$R'_{1a,5b;3a,7b}$。这两个霍尔电阻哪个受接触电阻影响导致的相对误差较小？证明你的结论。

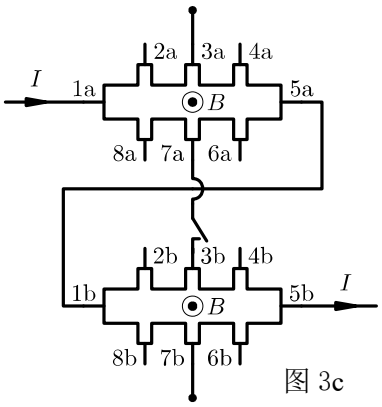

图 3c

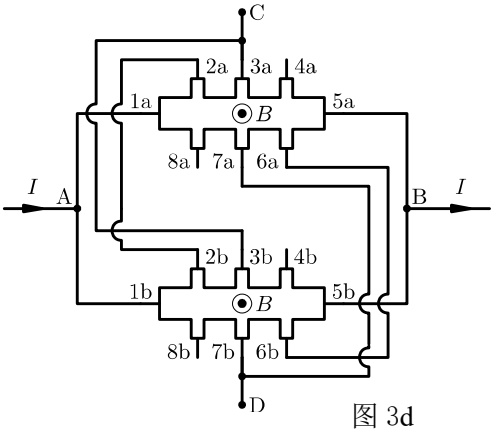

图 3d

（2.2） 当器件 a、b 按图 3d 所示的三重并联的方式连接时，求此系统在 A、B 点接入电流，在 C、D 点测量电电压得到的霍尔电阻$R_{\mathrm{A,B;C,D}}$。各端点的接触电阻导致的$R_{\mathrm{A,B;C,D}}$的相对误差为ϵ的几次方量级？在端口 5a、5b、6a、6b、7a、7b 的接触电阻均为零的假设下，证明你的结论。

四.（50 分）真空激光加速机制即是利用强激光脉冲加速电子使其获得能量增益。实际激光束的电磁场十分复杂，现采用单色平面电磁波与电子相互作用的简化模型。入射强激光可视为沿z轴传播的线偏振单色平面电磁波，入射波的电场和磁场可表示为

$$\boldsymbol{E}=E_0\cos(kz-\omega t)\,\boldsymbol{e_x},\quad \boldsymbol{B}=\frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\,\boldsymbol{e_y},$$

其中E_0为电场强度的振幅，c为真空中的光速，k为波矢的大小，ω为圆频率，$\boldsymbol{e_x}$和$\boldsymbol{e_y}$表示x轴和y轴的基矢。不计重力，应用相对论动力学讨论以下问题：

（1）假设$t=0$时电子静止且位于坐标原点处，忽略辐射阻尼，求

（1.1）t时刻电子的动量$\boldsymbol{p}$和能量ε（表达式中可含有t时刻的z坐标）；

（1.2）电子的位置坐标x,y,z与时间t的代数关系，可用隐函数形式表达。

（2） 假设$t=0$时刻将能量为ε_0的电子从坐标原点沿 x-z平面注入，且其初速度方向与x轴正方向的夹角不大于$\frac{\pi}{2}$，忽略辐射阻尼，求电子加速达到的最大能量$\varepsilon_{\max}$及相应的入射角θ_0，这里θ_0是电子入射方向与z轴之间的夹角。

（3）当激光脉冲强度很大时，辐射阻尼将无法忽略。辐射阻尼导致的能量损失满足

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=-\frac{e^4\mu_0E_0^2}{4\pi m_{\mathrm{e}}^4c^5}\varepsilon^2$$

其中μ_0为真空磁导率。已知激光脉冲强度$I=1.0\times10^{22}\ \mathrm{W/cm^2}$，激光波长$\lambda=800\ \mathrm{nm}$，初始时刻电子能量$\varepsilon_0=1000\,m_{\mathrm{e}}c^2$，求经过一个周期$T$由辐射阻尼引起的相对能量损失$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}$。已知$m_{\mathrm{e}}=9.101\times10^{-31}\mathrm{kg}$，$e=1.602\times10^{-19}\mathrm{C}$，$c=2.998\times10^{8}\mathrm{m/s}$，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{N/A^2}$，激光强度$I$是能流密度$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$大小的时间平均值。

五.（45 分）低温下的约瑟夫森结可作为超导量子计算电路的基本单元。如图 5a，理想的约瑟夫森结可视为“超导体-薄绝缘层（灰色区域）-超导体”组成的三明治结构，直角坐标系原点 O 位于其中心（z 轴正方向垂直于纸面向外，未画出），其在 y-z 平面内矩形截面的边长分别为 Y 和 Z，绝缘层厚度为 d（$d \ll Y$、Z）。超导体 1、2 中电子的状态可以分别用波函数$\psi_1\propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$、$\psi_2\propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$来描述，它们的相位差$\delta=\varphi_2-\varphi_1$. 由于绝缘层很薄，超导电子可以隧穿形成沿 x 方向的约瑟夫森电流，电流密度记为 j，结两端的电压记为 U，相位差δ满足约瑟夫森方程：

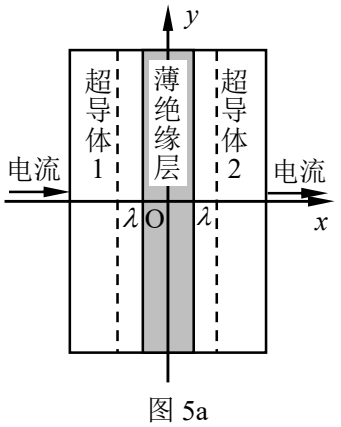

图 5a

$$j = j_0 \sin\delta\,, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar}U$$

其中 $j_0 > 0$ 为常量，$\hbar$是约化普朗克常量，e（$e > 0$）是元电荷的电荷量，$\frac{\partial\delta}{\partial t}$ 为在δ依赖的所有自变量中，除t之外的其他自变量均不变时δ对t求导。以上两式表明，即使约瑟夫森结两端电压 $U = 0$，也可以存在直流约瑟夫森电流。以上两式在外磁场为零和不为零两种情况下都成立；当外磁场为零时，相位差 δ 与空间坐标无关。

（1）当约瑟夫森结两端的电压 U 为直流恒定电压 U_0 时，试求此时电流密度 $j(t)$ 的表达式（$t = 0$时的相位差记为 $\delta(0)$），以及该电流变化的周期 T.

（2）当约瑟夫森结两端电压 $U = 0$ 时，沿 z 方向施加一恒定均匀外磁场。由于超导体对外磁场的屏蔽作用，总磁场只能存在于绝缘层及两侧等效厚度为 λ 的超导体内，即图 5a 中两虚线之间的区域。已知绝缘层内总磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 只有 z 分量且只与 y 坐标有关，即 $\boldsymbol{B} = B_z(y)\boldsymbol{e}_z$，其中 $\boldsymbol{e}_z$ 是 z 方向的单位矢量。相位差 δ 在外磁场不为零时随 y 坐标的变化满足 $\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}y} = \frac{2e(d+2\lambda)}{\hbar}B_z(y)$。

（2.1）忽略约瑟夫森电流产生的磁场，$B_z(y)$ 为常量 B_0，试求 $\delta(y)$（$y = 0$ 处的相位差记为 δ_0，$\delta_0 \neq k\pi$，k 为整数），以及总的约瑟夫森电流 I_J 与外磁场 B_0 的关系；试问当 B_0 为何值时，总电流 $I_J = 0$？

（2.2）考虑约瑟夫森电流产生的磁场，试证明此时 $\delta(y)$ 满足形如 $\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{\lambda_J^2}\sin\delta$ 的方程，并确定 λ_J 的表达式（λ_J 称为约瑟夫森穿透深度）。已知绝缘层材料的磁导率为 μ_0.

（3）在外磁场为零（相位差 δ 与空间坐标无关）的情况下，采用宏观电路模型研究外加一定直流偏置电流 I 的约瑟夫森结相位差 δ 随时间 t 的变化。约瑟夫森结具有等效电容 C（即三明治结构形成的平行板电容器的电容）。在一般工作状态下，约瑟夫森结还有与约瑟夫森电流并存的直流电流，需要考虑约瑟夫森结存在的直流电阻 R. 因此，实际的约瑟夫森结可以等效为满足约瑟夫森方程的理想结 J 与电阻 R、电容 C 的并联，如图 5b 所示。为简化起见，记 $I_0 = j_0 YZ$。

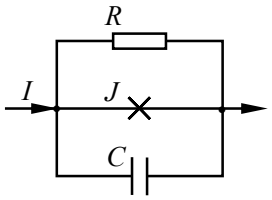

图 5b

（3.1）求以上三个支路电流的表达式（用相位差 $\delta(t)$ 及其时间导数表示），并导出 $\delta(t)$ 所满足的微分方程。

以下讨论中直流电阻 R 足够大，可忽略电阻支路中的电流。

（3.2）第（3.1）问中的微分方程描述的运动可视为“位移”为 δ 、单位“质量”的等效“粒子”在势 $V(\delta)$ 中的运动。求势 $V(\delta)$ 的表达式；当电流 I 处于什么范围时，势 $V(\delta)$ 存在势阱？求势阱底部对应的δ值，并求“粒子”在势阱底部做小幅振动的角频率 ω。

（3.3）改变偏置电流 I，第（3.2）问中的角频率 ω 将随之改变，角频率的最大值称为约瑟夫森等离子体角频率 ω_J. 已知电磁波在结区中传播的波速 $\bar{c} = \omega_J\lambda_J$，绝缘层材料的相对介电常量 $\varepsilon_r = 9.0$，$d = 3.0\mathrm{nm}$，$\lambda = 53\mathrm{nm}$，求 $\bar{c}$ 与真空中光速 c 的比值（结果保留两位有效数字）。

六.（45 分） 一转速仪的简化模型如图 6a 所示。竖直转轴底部由光滑地面支撑，并由固定的光滑轴承 A、B 约束。两轴承的厚度均可忽略，它们相距 $2h$，其中点为 O。质量分别为 m_1 和 m_2 的小球 a 和 b（均可视为质点）固定在质量为 M 、长为 $2l$ 的匀质细杆的两端；一光滑水平轴固定在竖直转轴的 O 点，细杆中心的小圆孔套在此水平轴上，细杆可在它和转轴所在的平面内绕此水平轴转动。以 O 为原点、竖直向上为 z 轴正方向建立固定于地面的直角坐标系 O-xyz，y 轴垂直于纸面向里（图中未画出），x、y、z 方向的单位矢量分别记为 $\boldsymbol{e}_x$ 、$\boldsymbol{e}_y$ 、$\boldsymbol{e}_z$。记 Oa 相对于 z 轴正方向的夹角为 θ 。转轴上 O 处装有一轻质盘簧，可对细杆施加一大小为 $k\theta$ 的回复力矩，其中 k 为盘簧的扭转系数。重力加速度大小为 g.

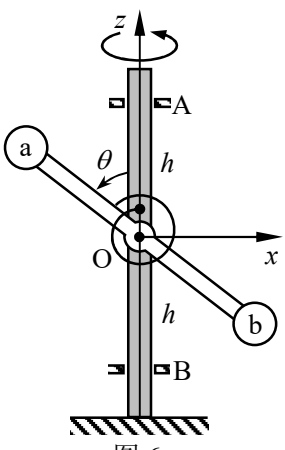

图 6a

（1）转速仪以某一角速度绕竖直转轴做匀速转动，θ 为某一固定值 θ_0（$0 < \theta_0 < \pi$

且 $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$）。

（1.1）求转速仪做匀速转动的角速度 ω_0，并分别在 $m_1 > m_2$ 和 $m_1 \leq m_2$ 的情况下讨论实际存在此 ω_0 时 θ_0 所满足的条件；

（1.2）某时刻，细杆运动至如图 6a 所示的 *x-z* 平面内，求此时转速仪相对 O 点的角动量 $\boldsymbol{L}$ 以及轴承 A、B 对转轴的作用力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}$、$\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}}$.

（2）取 $m_1 = m_2 = m$，初始时系统处于第（1）问中的稳定运动状态；某时刻（记为 $t = 0$）小球 a 受到在细杆和竖直转轴所在平面内、且垂直于细杆的冲击（使 θ 增大），此冲击作用时间极短。已知在此后的运动过程中 θ 的最大值为 θ_{M}（$\theta_0 < \theta_{\mathrm{M}} < \pi$）。

（2.1）求小球 a 在受到冲击后的瞬间，θ 的时间变化率 Ω_0；

（2.2）当冲击足够小时，细杆可在 θ_0 附近做小幅简谐振动，求振动的角频率 ω_θ；

（2.3）记 $\delta_0 = \theta_{\mathrm{M}} - \theta_0$（$\delta_0 << \theta_0$），求 t 时刻转速仪绕竖直转轴转动的角速度 $\omega(t)$，结果保留至 δ_0 的一阶项。

七.（45 分）在光纤中传播的光信号到达光纤的外表面时，会发生折射和反射。折射光导致能量损耗，降低光信号的信噪比。通过掺杂工艺可以改变光纤的折射率，使光线在光纤中螺旋前进，不到达光纤的外表面，避免折射造成的能量损失。现考虑一种由所谓自聚焦光纤构成的圆柱体，其对称轴为z轴，它的一段如图 7a 所示。在光纤中建立柱坐标系，光纤中质元的位置坐标为(ρ, θ, z). 光纤中任意一点的折射率n随该点到z轴的距离ρ的增加而递减，即

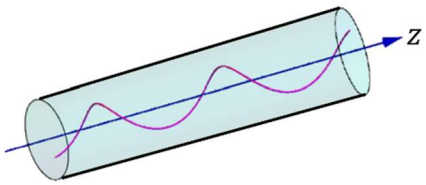

图 7a

$$n = n_0\sqrt{1-\alpha^2\rho^2}$$

这里，α和n_0均为大于零的常量，且α足够小。光纤内的光线是三维空间曲线，记曲线的参数方程为

$$\rho = \rho(z), \qquad \theta = \theta(z)$$

已知光纤的横截面半径足够大，光线轨迹始终不能到达光纤柱体的侧面。

（1）导出$\rho(z)$和$\theta(z)$满足的微分方程。

（2）如果在光纤内部$z = 0$处，光线满足边界条件

$$\rho(0) = \rho_0,\ \rho'(0) = k_1 > 0;\ \theta(0) = 0,\ \theta'(0) = k_2 > 0$$

其中字母右上角的撇号表示对z求导。求光线在此后的传播中，离轴线的最远距离$\rho_{\max}$。

（3）在第（2）问的边界条件下，求解光线在直角坐标系中的轨迹$x(z), y(z)$。