2025 年上海市春季高考数学试卷

2025.01

一、填空题（本大题共 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）

1. 已知集合 $A=\{x|x>0\}, B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$_____.

2. 不等式 $\frac{x}{x-1}<0$ 的解集为_____.

3. 已知复数 $z=\frac{2+i}{i}$，其中 i 为虚数单位，则 $|z|=$_____.

4. 已知 $\vec{a}=(2,1), \vec{b}=(1,x)$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $x=$_____.

5. 已知 $\tan\alpha=1$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

6. 已知 $\left(x+\frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项是 20，则 $a=$_____.

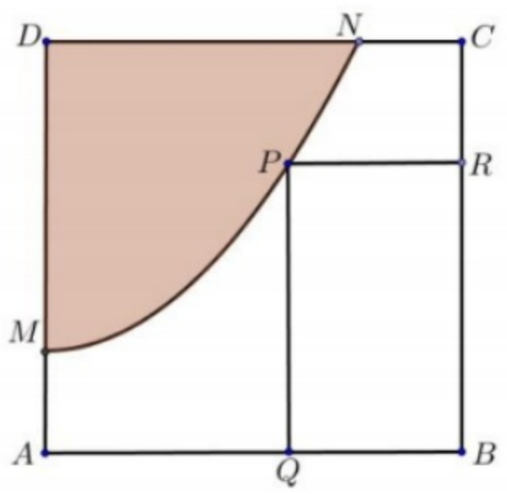
7. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，$\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 $q(q>0)$ 的等比数列. 若数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前三项和为 2，则 $q=$_____.

8. 关于 x 的方程 $|x-1|+|\pi-x|=\pi-1$ 的解集为_____.

9. 已知 P 是一个圆锥的顶点，母线 $PA=2$，该圆锥的底面半径是 1，B,C 分别在圆锥的底面上，则异面直线 PA 与 BC 所成角的最小值为_____.

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6-a^2}=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2. 过 F_2 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与双曲线交于第一象限的点 A，延长 AF_2 至 B，使得 $AB=AF_1$. 若 ΔBF_1F_2 的面积为 $3\sqrt{6}$，则 a 的值为_____.

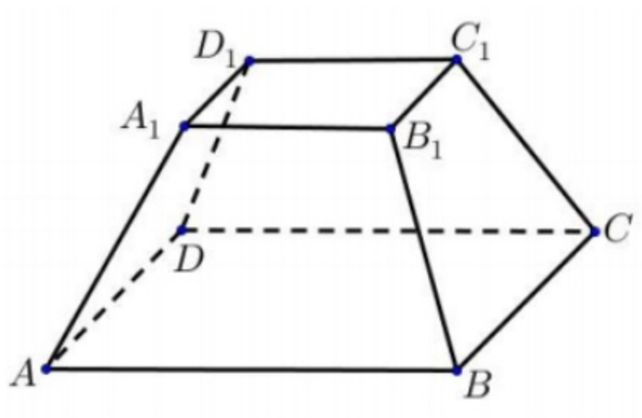
11. 如图所示，正方形 $ABCD$ 是一块边长为 4 的工程用料，阴影部分所示是被腐蚀的区域，其余部分完好，曲线 MN 是以 AD 为对称轴的抛物线的一部分，$DM=DN=3$. 工人师傅现要从完好的部分中截取一块矩形原料 $BQPR$，当其面积有最大值时，AQ 的长为_____.



12. 在平面中，$\vec{e_1}$ 和 $\vec{e_2}$ 是互相垂直的单位向量，向量 $\vec{a}$ 满足 $|\vec{a}-4\vec{e_1}|=2$，向量 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}-6\vec{e_2}|=1$，求 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的数量投影的最大值为_____.

二、选择题（本大题共 4 题，第 13、14 题每题 4 分，第 15、16 题每题 5 分，共 18 分）

13. 如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台，则下列各组直线中，属于异面直线的是



A. AB 和 C_1D_1　　B. AA_1 和 CC_1

C. BD_1 和 B_1D　　D. A_1D_1 和 AB

14. 已知幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数，且经过 $(-1,-1)$，则 a 的值可能是

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

15. 已知四边形 $ABCD$，对于其四边 AB, BC, CD, DA，按顺序分别抛掷一枚质量均匀的硬币. 如硬币正面朝上，则将其擦去；如硬币反面朝上，则不擦去. 最后，以 A 为起点沿着尚未擦去的边出发，可以到达 C 点的概率为

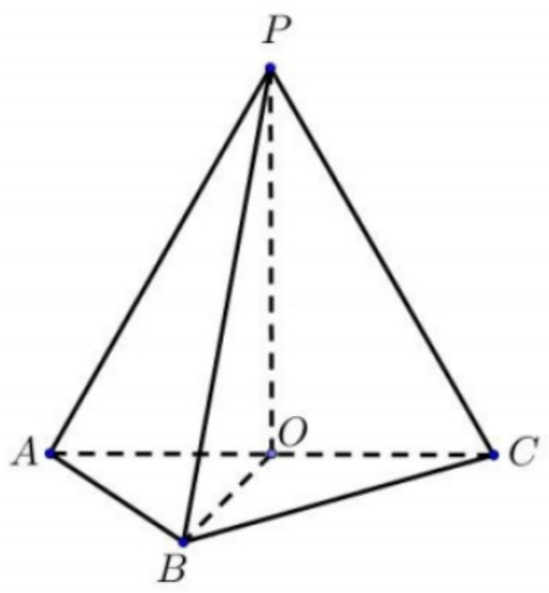
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{7}{16}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{3}{16}$

16. 已知 $a\in R$，若不等式 $\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)-a\right]\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)-a-1\right]<0$ 在 $(0,2025)$ 中整数解有 m 个. 则 m 的个数不可能是

A. 0　　B. 338　　C. 674　　D. 1012

三、解答题（本大题共 5 题，微信公众号：浙江省高中数学共 14+14+14+18+18=78 分）

17. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$PA=AC=CP=2$，$AB=BC=\sqrt{2}$，点 O 是棱 AC 的中点.



（1）证明：$BO\perp$ 平面 PAC，并求三棱锥 $B-OPA$ 的体积；

（2）求二面角 $B-PC-A$ 的大小.

18. 在 ΔABC 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c，且 $c=5$.

（1）若 $\frac{a}{4b}=\frac{\sin B}{\sin A}, C=\frac{\pi}{2}$，求 a 的值；

（2）若 $ab=20$，求 ΔABC 的面积的最大值.

19. 甲、乙是两个体育社团的小组.(微信公众号：浙江省高中数学)如下是两组组员身高的茎叶图（单位：厘米），以身高的百位数和十位数作为“茎”排列在中间，个位数作为“叶”分列在两边.

甲队							乙队							
						15	9							
	7	7	5	5	4	16	0	3	5	5	6	7	8	8
8	5	4	3	2	2	17	2							
					3	18								

甲、乙两小组组员身高分布茎叶图

（1）分别求甲、乙两组组员身高的第 60 百分位数；

（2）从甲、乙两组各选取一个组员，求两人身高均在 170 厘米以上的概率；

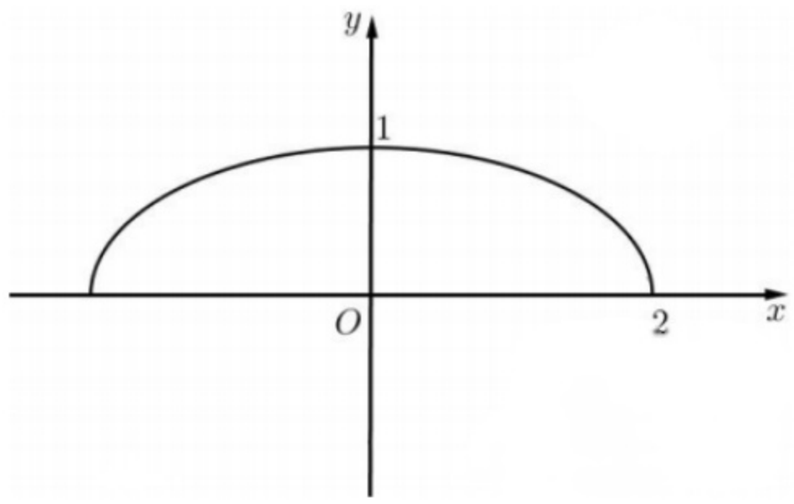
（3）为使两组人数相同，从甲组中调派一个队员到乙组. 是否存在甲组的一个组员，将他调派至乙组后，甲、乙两组的平均身高都增大?

20. 在平面直角坐标系中，已知曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{4}+y^2=1(y\geq 0)$，点 P,Q 分别为 Γ 上不同的两点，设点 $T(t,0)$.

（1）求 Γ 所在椭圆的离心率；

（2）若 $t=1$，点 Q 在 y 轴上，点 T 到直线 PQ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，求点 P 的坐标；

（3）是否存在 t，使得 ΔTPQ 是以点 T 为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求 t 的取值范围；若不存在，请说明理由.



21. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D. 对于 $t\in D$，定义集合 $S_{f(t)}=\{x|f(x)\geq f(t)\}$.

（1）若函数 $f(x)=\log_2 x$，求 $S_{f(16)}$；

（2）对于集合 A，若对任意 $x\in A$ 都有 $-x\in A$，则称 A 是对称集. 若 D 是对称集，证明：“函数 $y=f(x)$ 是偶函数”的充要条件是“对任意 $t\in D$，都有 $S_{f(t)}=S_{f(-t)}$”；

（3）若函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}mx^2$，$x\in R$ 对任意 $t_1<t_2\in D$，都有 $S_{f(t_2)}\subseteq S_{f(t_1)}$，求 m 的取值范围.

2025 年上海市春季高考数学试卷

全解析

一、填空题（本大题共 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）

1. 已知集合 $A=\{x|x>0\}, B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】$\{1,2\}$

【解析】（宁波老罗老师）

易得 $A\cap B=\{1,2\}$.

故答案为：$\{1,2\}$

2. 不等式 $\frac{x}{x-1}<0$ 的解集为_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】$(0,1)$

【解析】（宁波老罗老师）

由题 $x(x-1)<0\Rightarrow 0<x<1$.

故答案为：$(0,1)$

3. 已知复数 $z=\frac{2+i}{i}$，其中 i 为虚数单位，则 $|z|=$_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】$\sqrt{5}$

【解析】（宁波老罗老师）

$z=\frac{2+i}{i}=\frac{(2+i)i}{i^2}=1-2i$，所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$

4. 已知 $\vec{a}=(2,1), \vec{b}=(1,x)$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $x=$_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】（宁波老罗老师）

由 $\vec{a}//\vec{b}$ 得 $2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$

5. 已知 $\tan\alpha=1$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】0

【解析】（宁波老罗老师）

$\tan\alpha=1$，则 $\cos\alpha=\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=0$.

故答案为：0

6. 已知 $\left(x+\frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项是 20，则 $a=$_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】1

【解析】（四川美数生老师）

由题知通项公式 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(\frac{a}{x})^r=a^r C_6^r x^{6-2r}$，已知常数项是 20，则 $6-2r=0$，所以 $r=3$，

则 $a^3C_6^3=20$，解之得 $a=1$.

故答案为：1

7. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，$\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 $q(q>0)$ 的等比数列. 若数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前三项和为 2，则 $q=$_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】（四川美数生老师）

由等差数列、等比数列的通项公式得：$a_n=n$，$b_n=q^{n-1}$，则数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前三项为：

$a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3=1+2q+3q^2=2$，解方程得：$q=\frac{1}{3}$ 或 $q=-1$，又 $q>0$，所以 $q=\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$

8. 关于 x 的方程 $|x-1|+|\pi-x|=\pi-1$ 的解集为_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】$[1,\pi]$

【解析】（杭州无花果老师）

分析：去绝对值，方法如下：令 $y=|x-1|+|\pi-x|$，

①当 $x<1$ 时，$y=-(x-1)+(\pi-x)=-2x+\pi+1$；

②当 $1\le x\le\pi$ 时，$y=(x-1)+(\pi-x)=\pi-1$；

③当 $x>\pi$ 时，$y=(x-1)-(\pi-x)=2x-\pi-1$.

综上，方程 $|x-1|+|\pi-x|=\pi-1$ 的解集为 $[1,\pi]$.

故答案为：$[1,\pi]$

9. 已知 P 是一个圆锥的顶点，母线 $PA=2$，该圆锥的底面半径是 1，B,C 分别在圆锥的底面上，则异面直线 PA 与 BC 所成角的最小值为_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】$\frac{\pi}{3}$

【解析】（湖州黄重金老师）

根据最小角定理可知：线线角≥线面角，所以异面直线 PA 与 BC 所成角的最小角为 PA 与底面所成的角，由 $PA=2,r=1$，显然可得线面角 θ 的余弦值为 $\cos\theta=\frac{r}{PA}=\frac{1}{2}$，故 $\theta=\frac{\pi}{3}$，即异面直线 PA 与 BC 所成角的最小角为 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{\pi}{3}$

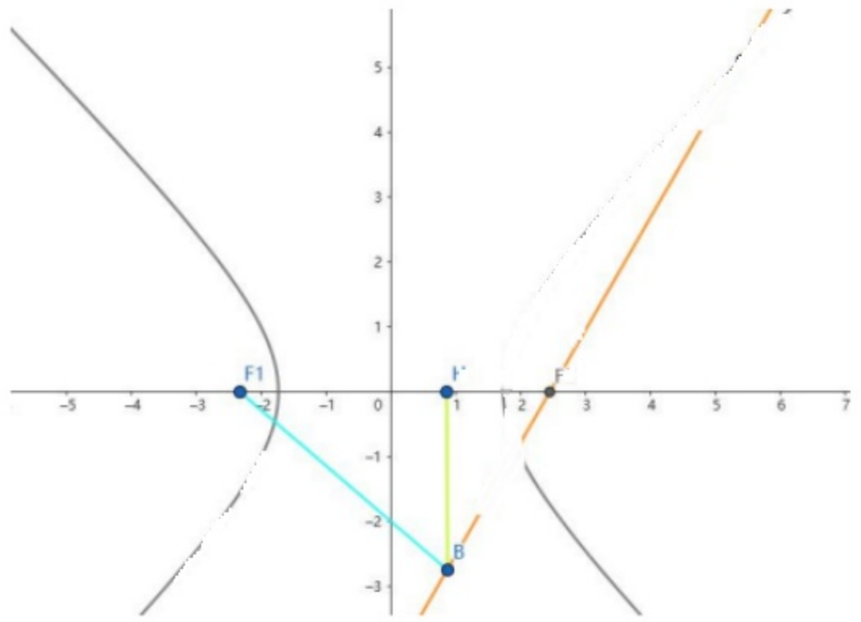
10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6-a^2}=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2. 过 F_2 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与双曲线交于第一象限的点 A，延长 AF_2 至 B，使得 $AB=AF_1$. 若 ΔBF_1F_2 的面积为 $3\sqrt{6}$，则 a 的值为_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】（嘉兴小老杨老师）

由双曲线方程易知 $c^2=a^2+6-a^2=6$， $F_1F_2=2c=2\sqrt{6}$，



如图，在△ BF_1F_2 中，过 B 作高 BH ；

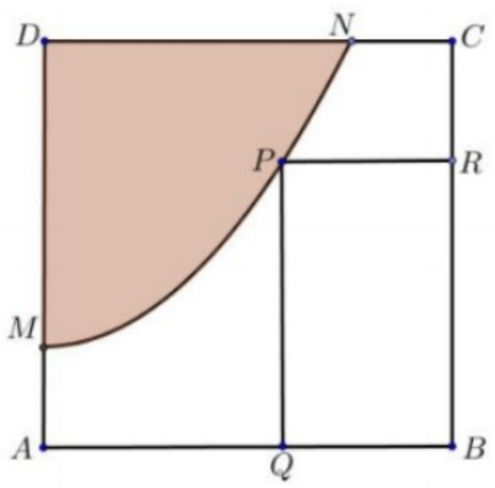
由 $S_{\triangle BF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot BH=3\sqrt{6}$， $BH=3$；

在三角形 BHF_2 中， $BF_2=\frac{BH}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，

所以 $2a=AF_1-AF_2=AB-AF=BF_2=2\sqrt{3}, a=\sqrt{3}$.

故答案为： $\sqrt{3}$

11. 如图所示，正方形 $ABCD$ 是一块边长为 4 的工程用料，阴影部分所示是被腐蚀的区域，其余部分完好，曲线 MN 是以 AD 为对称轴的抛物线的一部分， $DM=DN=3$. 工人师傅现要从完好的部分中截取一块矩形原料 $BQPR$，当其面积有最大值时，AQ 的长为_____.



公众号：（浙江省高中数学）

【答案】 $\frac{4+\sqrt{7}}{3}\approx 2.22$

【解析】（宁波徐彬焱老师）

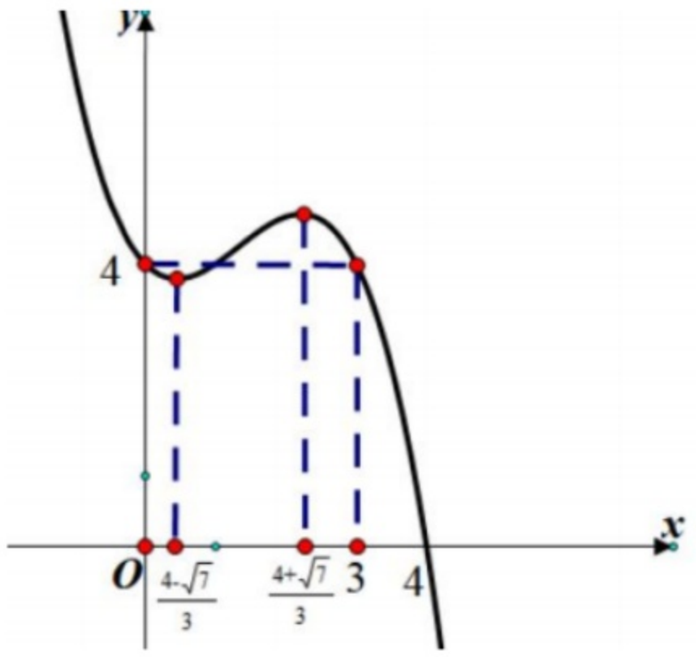
以 M 为原点建系，则 $N(3,3)$，设 MN 所在抛物线方程为 $y=ax^2$，

代入解得 $a=\frac{1}{3}$，所以 $MN: y=\frac{1}{3}x^2\ (0\le x\le 3)$，

设 $P\left(x_0,\frac{x_0^2}{3}\right)$，则 $|PQ|=\frac{x_0^2}{3}+1, |PR|=4-x_0$，

所以 $S_{BQPR}=(4-x_0)\left(\frac{x_0^2}{3}+1\right)=-\frac{x_0^3}{3}+\frac{4}{3}x_0^2-x_0+4=f(x)$，

则 $f'(x)=-x^2+\frac{8}{3}x-1$，令 $f'(x)=0\Rightarrow\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{7}{9}\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$，



所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ 单调递减， $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3},\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ 单调递增， $\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3},3\right)$ 单调递减，

$f(0)=4, f\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{14\sqrt{7}+344}{81}\approx 4.7$，所以 $f(0)<f\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$，

故当 $BQPR$ 面积有最大值时， AQ 的长为 $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

故答案为： $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$

12. 在平面中， $\overrightarrow{e_1}$ 和 $\overrightarrow{e_2}$ 是互相垂直的单位向量，向量 $\vec{a}$ 满足 $\left|\vec{a}-4\overrightarrow{e_1}\right|=2$ ，向量 $\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{b}-6\overrightarrow{e_2}\right|=1$ ，求 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的数量投影的最大值为_____.

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】4

【解析】（台州赵清老师）

令 $\overrightarrow{e_1}=(1,0),\overrightarrow{e_2}=(0,1)$ ，则由

$\left|\vec{a}-4\overrightarrow{e_1}\right|=2$ $\Rightarrow$ 向量 $\vec{a}$ 终点的轨迹为以 $(4,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，

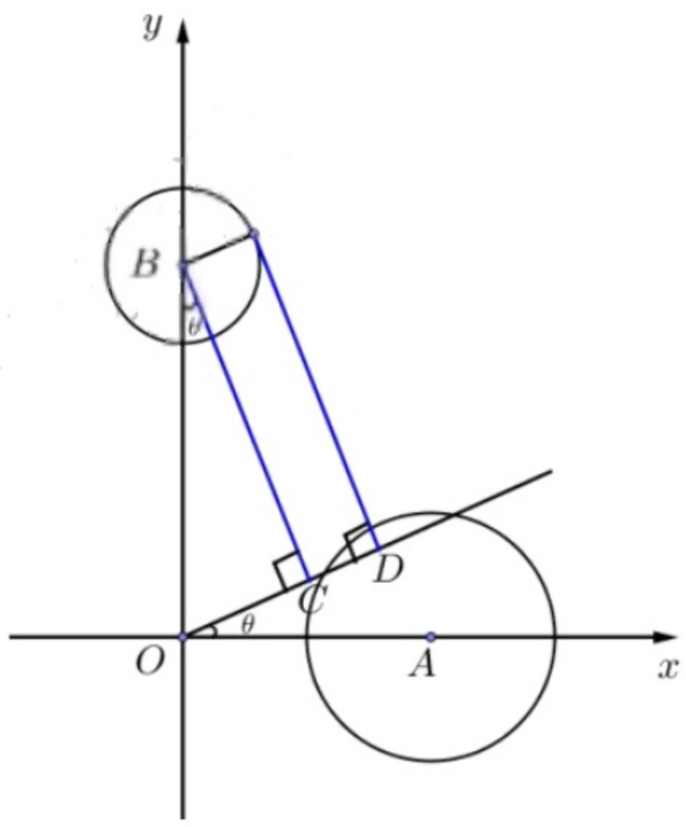
$\left|\vec{b}-6\overrightarrow{e_2}\right|=1$ $\Rightarrow$ 向量 $\vec{b}$ 终点的轨迹为以 $(0,6)$ 为圆心，1 为半径的圆，

易知 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影为 OD ， $OC=6\sin\theta, OD=6\sin\theta+1$ ，

要求 OD 的最大值，即求 $6\sin\theta+1$ 的最大值，

易知当 OD 与圆 A 相切时， $6\sin\theta+1$ 取得最大值，

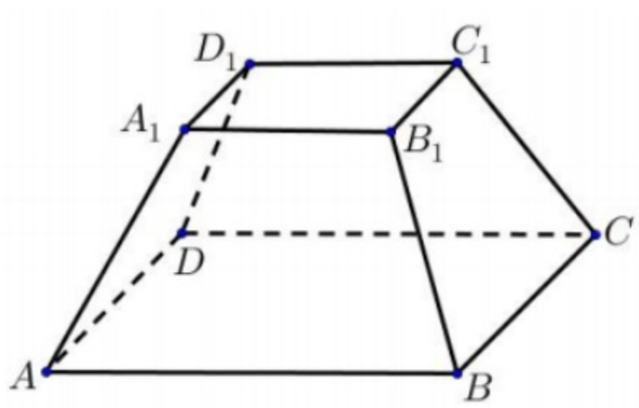
此时 $6\sin\theta+1=6\times\frac{2}{4}+1=4$.



故答案为：4

二、选择题（本大题共 4 题，第 13、14 题每题 4 分，第 15、16 题每题 5 分，共 18 分）

13. 如图， $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台，则下列各组直线中，属于异面直线的是



A. AB 和 C_1D_1

B. AA_1 和 CC_1

C. BD_1 和 B_1D

D. A_1D_1 和 AB

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】D

【解析】（金华吴贤盛老师）

选项 A 中两直线平行，选项 B 中两直线相交，选项 C 中两直线也相交，故答案为 D.

故选择：D

14. 已知幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数，且经过 $(-1,-1)$ ，则 a 的值可能是

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】B

【解析】（金华吴贤盛老师）

幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，故 $a<0$，排除 C、D 选项；当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，$y=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 不经过 $(-1,-1)$.

故选择：B

15. 已知四边形 $ABCD$，对于其四边 AB, BC, CD, DA，按顺序分别抛掷一枚质量均匀的硬币. 如硬币正面朝上，则将其擦去；如硬币反面朝上，则不擦去. 最后，以 A 为起点沿着尚未擦去的边出发，可以到达 C 点的概率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{7}{16}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{3}{16}$

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】B

【解析】（宁波孟老师）

总基本事件共有 $2^4=16$ 种情况，

从 A 点出发，到达 C 点，共有 2 种路径：$A\to B\to C$ 或 $A\to D\to C$（情况相同，只讨论一种），

$A\to B\to C$，此时 CD, DA 共有 $2\times2=4$ 种情况（有可能被擦除，有可能全部留下），

但由于 $A\to B\to C$ 或 $A\to D\to C$ 有彼此重复 1 种，故共有 $4\times2-1=7$ 种，

故到达 C 点的概率为：$P=\frac{7}{16}$.

故选择：B

16. 已知 $a\in R$，若不等式 $\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)-a\right]\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)-a-1\right]<0$ 在 $(0,2025)$ 中整数解有 m 个. 则 m 的个数不可能是

A. 0　　B. 338　　C. 674　　D. 1012

公众号：（浙江省高中数学）

【答案】D

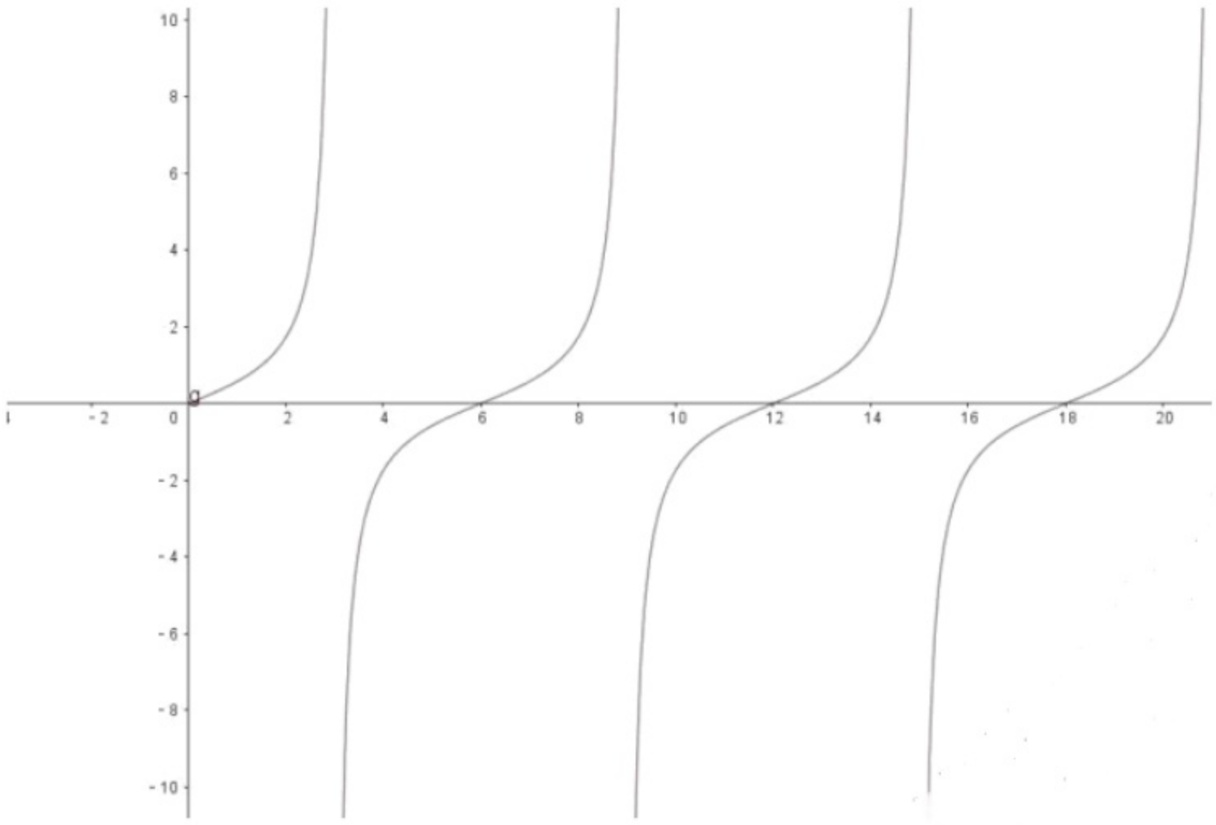
【解析】（芜湖尚老师）

因为$\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)-a\right]\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)-a-1\right]<0$，所以$a<\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)<a+1$，

令$y=\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)$，则它的最小正周期为$T=\frac{\pi}{\frac{\pi}{6}}=6$，又$2025\div6=337\cdots3$，

所以，函数$y=\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)$在区间$(0,2025)$内的图象有337个完整的图象和一个$(0,3)$内的图象，

即在x轴上方有338个相同的图象，x轴下方有337个相同的图象.



又因为$f(0)=0$，$f(1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$f(2)=\sqrt{3}$，$f(3)$不存在，$f(4)=-\sqrt{3}$，$f(5)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以：当$a>\sqrt{3}$或$a+1<-\sqrt{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}<a<a+1<\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}<a<a+1<-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

即$a\in\left\{a\mid a<-1-\sqrt{3}或-\sqrt{3}<a<-1-\frac{\sqrt{3}}{3}或\frac{\sqrt{3}}{3}<a<\sqrt{3}-1或a>\sqrt{3}\right\}$时，此时无整数解，即0个；

当$a\le\sqrt{3}\le a+1$或$0\le a\le\frac{\sqrt{3}}{3}\le a+1$，即$a\in\left\{a\mid 0\le a\le\frac{\sqrt{3}}{3}或\sqrt{3}-1\le a\le\sqrt{3}\right\}$时，此时有338整数解，即338个；

当$a\le-\sqrt{3}\le a+1$或$a\le-\frac{\sqrt{3}}{3}\le a+1\le0$或$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le a<a+1\le\frac{\sqrt{3}}{3}$，

即$a\in\left\{a\mid-\sqrt{3}-1\le a\le-\sqrt{3}或-\frac{\sqrt{3}}{3}-1\le a\le-1或-\frac{\sqrt{3}}{3}\le a\le\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right\}$时，此时有337整数解，即337个；

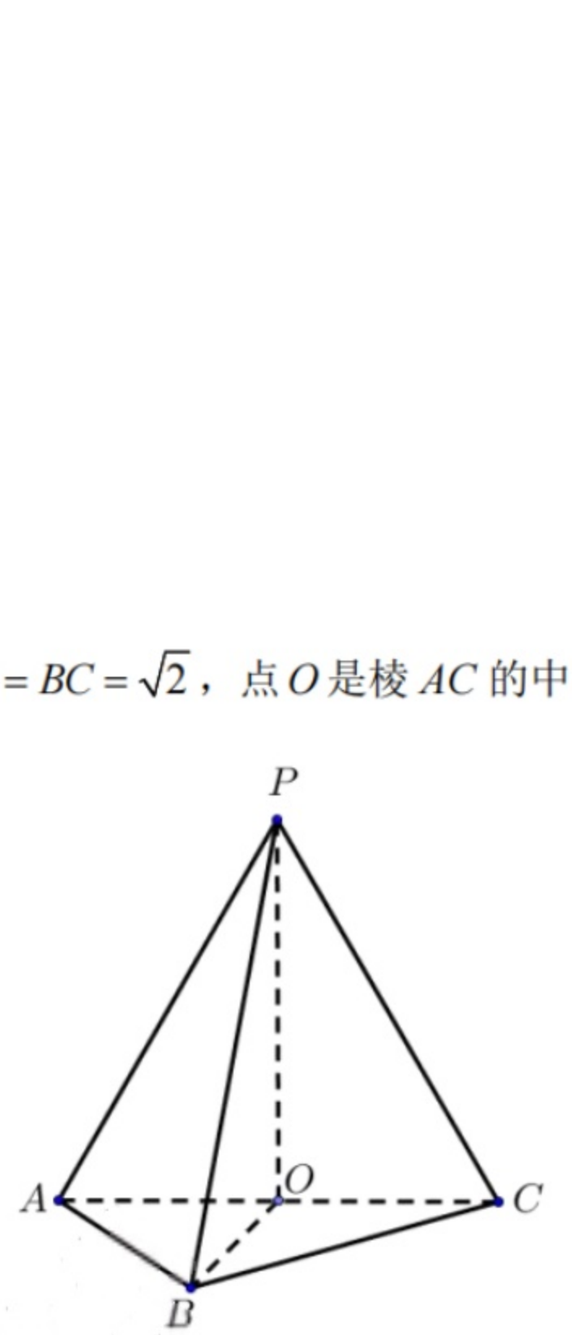
当$a<0$且$a+1>\frac{\sqrt{3}}{3}$，即$a\in\left\{a\mid\frac{\sqrt{3}}{3}-1<a<0\right\}$时，此时有337+338个整数解，即675个；

当$a<-\frac{\sqrt{3}}{3}$且$a+1>0$，即$a\in\left\{a\mid-1<a<-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$时，此时有337+337个整数解，即674个.

故选择：**D**

三、解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+18+18=78 分）

17. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$PA=AC=CP=2$，$AB=BC=\sqrt{2}$，点 O 是棱 AC 的中点.



（1）证明：$BO\perp$ 平面 PAC，并求三棱锥 $B-OPA$ 的体积；

（2）求二面角 $B-PC-A$ 的大小.

公众号：（浙江省高中数学）

【解析】（宁波张萍老师）

（1）因为 $AB=BC=\sqrt{2}$，$AC=2$，所以 ΔABC 为等腰直角三角形，

故 BO 既是 AC 的中线(微信公众号：浙江省高中数学)也是 AC 的垂线，

又因为平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，所以 $BO\perp$ 平面 PAC，同理，$PO\perp$ 面 ABC，

故 $V_{B-OPA}=V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\cdot PO\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）过 O 作 $OD\perp PC$，因为 $BO\perp$ 平面 PAC，所以 $BO\perp PC$，

所以 $PC\perp$ 面 BOD，所以 $PC\perp BD$，

所以 $\angle BDO$ 即为二面角 $B-PC-A$ 的平面角，$\cos\angle BDO=\frac{OD}{BD}$，

易知 $OD=\frac{\sqrt{3}}{2},OB=1$，所以 $BD=\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以 $\cos\angle BDO=\frac{OD}{BD}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $\angle BDO=\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$，即二面角 $B-PC-A$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$.

18. 在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $c=5$.

（1）若 $\frac{a}{4b}=\frac{\sin B}{\sin A},C=\frac{\pi}{2}$，求 a 的值；

（2）若 $ab=20$，求 ΔABC 的面积的最大值.

公众号：（浙江省高中数学）

【解析】（金华杜小文老师）

（1）由正弦定理可知：$\frac{a}{4b}=\frac{\sin B}{\sin A}\Rightarrow\frac{a}{4b}=\frac{b}{a}\Rightarrow 4b^2=a^2$，

又因为 $C=\frac{\pi}{2}$，故 $c^2=a^2+b^2$，即 $c^2=5b^2$，又 $c=5$，所以 $b=\sqrt{5}$，$a=2\sqrt{5}$.

（2）由余弦定理可知，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

因为 $c=5, ab=20$，故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-25}{40} \geq \frac{2ab-25}{40}=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$，当且仅当 $a=b=2\sqrt{5}$ 时取等，

也即 $\sin C \leq \sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{\frac{55}{64}}=\frac{\sqrt{55}}{8}$，所以 $S_{\Delta ABC} \leq \frac{1}{2}ab\sin C=\frac{5}{4}\sqrt{55}$，即 ΔABC 面积最大值为 $\frac{5}{4}\sqrt{55}$.

19. 甲、乙是两个体育社团的小组. 如下是两组组员身高的茎叶图（单位：厘米），以身高的百位数和十位数作为“茎”排列在中间，个位数作为“叶”分列在两边.

甲队							乙队							
						15	9							
	7	7	5	5	4	16	0	3	5	5	6	7	8	8
8	5	4	3	2	2	17	2							
					3	18								

甲、乙两小组组员身高分布茎叶图

（1）分别求甲、乙两组组员身高的第 60 百分位数；

（2）从甲、乙两组各选取一个组员，求两人身高均在 170 厘米以上的概率；

（3）为使两组人数相同，从甲组中调派一个队员到乙组. 是否存在甲组的一个组员，将他调派至乙组后，甲、乙两组的平均身高都增大?

公众号：（浙江省高中数学）

【解析】（金华杜小文老师）

（1）由茎叶图易知甲组共 12 人，乙组共 10 人，

甲组第 60 百分位数为 $12\times 0.6=7.2$，取第 8 位，即身高为 173cm；

乙组第 60 百分位数为 $10\times 0.6=6$，取第 6、7 位组员的平均值 $\frac{167+166}{2}=166.5$ cm.

（2）令甲组任取一位身高在 170 厘米以上的概率为 P_1，乙组任取一位身高在 170 厘米以上的概率为 P_2，

易知 $P_1=\frac{7}{12}, P_2=\frac{1}{10}$，(微信公众号：浙江省高中数学)所以 $P=\frac{7}{12}\times\frac{1}{10}=\frac{7}{120}$.

（3）易求得甲组身高均值为 171.25，乙组身高均值为 165.3，

故只需派低于 171.25 且高于 165.3 的甲组成员到乙组即可满足题意，

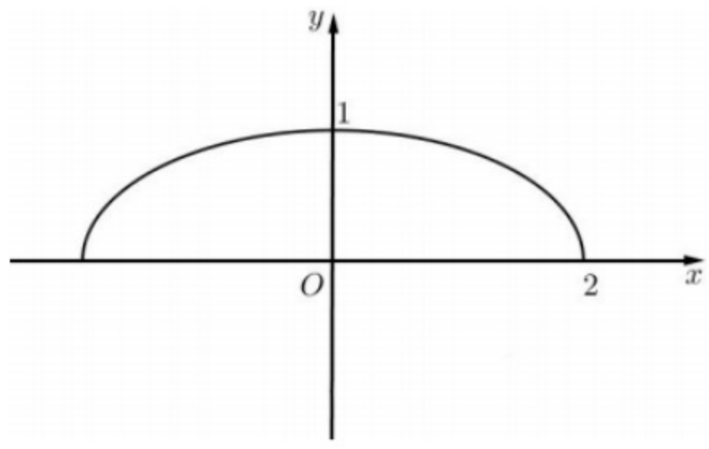
显然甲组的 167 这位组员满足要求.

20. 在平面直角坐标系中，已知曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{4}+y^2=1(y\geq 0)$，点 P, Q 分别为 Γ 上不同的两点，设点 $T(t,0)$.

（1）求 Γ 所在椭圆的离心率；

（2）若 $t=1$，点 Q 在 y 轴上，点 T 到直线 PQ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，求点 P 的坐标；

（3）是否存在t，使得ΔTPQ是以点T为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求t的取值范围；若不存在，请说明理由.



公众号：（浙江省高中数学）

【解析】（杭州刘君老师）

（1）由题意$a=2,b=1$，得$c=\sqrt{3}$，所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

（2）由题意得$T(1,0),Q(0,1)$，直线PQ的斜率必存在，否则直线PQ与Γ只有一个交点，

设直线$PQ:y=kx+1$，则点T到直线PQ的距离为$d=\dfrac{|k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，解得$k=-2$或$-\dfrac{1}{2}$，

当$k=-2$时，联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=2x+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{16}{17}\\ y=-\dfrac{15}{17}\end{cases}$，不符合题意，舍去；

当$k=-\dfrac{1}{2}$时，联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=-\dfrac{1}{2}x+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$，符合题意，

故点P的(微信公众号：浙江省高中数学)坐标为$(2,0)$.

（3）设$PQ:x=my+n$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，$(y_1\geq 0,y_2\geq 0)$，

若m存在，联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=my+n\end{cases}\Rightarrow(m^2+4)y^2+2mny+n^2-4=0$，

所以$\Delta>0,y_1+y_2=-\dfrac{2mn}{m^2+4},y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{m^2+4}$，

所以$mn<0,n^2-4\geq 0,x_1+x_2=\dfrac{8n}{m^2+4},x_1x_2=\dfrac{4n^2-4m^2}{m^2+4}$，

由$|PT|=|QT|$，可得$\sqrt{(x_1-t)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_2-t)^2+y_2^2}$，化简得$t=\dfrac{3n}{m^2+4}$，

由$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=0$，可得$(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=0$，化简得$(m^2+1)(5n^2-4m^2-16)=0$，

所以$m^2=\dfrac{5}{4}n^2-4$，所以$t=\dfrac{3n}{m^2+4}=\dfrac{12}{5n}\in\left[-\dfrac{6}{5},0\right)\cup\left(0,\dfrac{6}{5}\right]$；

若m不存在，由对称性可知当$t=0$时符合题意.

综上所述，$t\in\left[-\dfrac{6}{5},\dfrac{6}{5}\right]$.

21. 已知函数$y=f(x)$的定义域是D. 对于$t\in D$，定义集合$S_{f(t)}=\{x|f(x)\geq f(t)\}$.

（1）若函数 $f(x)=\log_2 x$，求 $S_{f(16)}$；

（2）对于集合 A，若对任意 $x\in A$ 都有 $-x\in A$，则称 A 是对称集. 若 D 是对称集，证明：“函数 $y=f(x)$ 是偶函数”的充要条件是“对任意 $t\in D$，都有 $S_{f(t)}=S_{f(-t)}$”；

（3）若函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}mx^2$，$x\in R$ 对任意 $t_1<t_2\in D$，都有 $S_{f(t_2)}\subseteq S_{f(t_1)}$，求 m 的取值范围.

公众号：（浙江省高中数学）

【解析】（杭州陈老师）

（1）由 $f(x)\geq f(16)\Rightarrow \log_2 x\geq \log_2 16\Rightarrow x\geq 16$，所以 $S_{f(16)}=\{x|x\geq 16\}$.

（2）一、若 $y=f(x)$ 是偶函数，$\forall t\in D, f(t)=f(-t)$，

由定义 $S_{f(t)}=\{x|f(x)\geq f(t)\}$，$S_{f(-t)}=\{x|f(x)\geq f(-t)\}$，所以 $S_{f(t)}=S_{f(-t)}$；

二、若 $\forall t\in D$，都有 $S_{f(t)}=S_{f(-t)}$，由 $f(t)=f(t)$，符合 $S_{f(t)}$ 的条件，所以 $t\in S_{f(t)}$，同理，$-t\in S_{f(-t)}$，

由 $S_{f(t)}=S_{f(-t)}$ 知，$t\in S_{f(t)}\Rightarrow t\in S_{f(-t)}$，即 $f(t)\geq f(-t)$ 成立，同理，$f(-t)\geq f(t)$ 成立，

所以 $f(t)=f(-t)$，由 t 的任意性知，函数 $y=f(x)$ 是偶函数.

（3）$\forall t_1<t_2\in R$，由 $S_{f(t_2)}\subseteq S_{f(t_1)}$，所以 $x\in S_{f(t_2)}\Rightarrow x\in S_{f(t_1)}$，即 $f(x)\geq f(t_2)\Rightarrow f(x)\geq f(t_1)$，

所以 $f(t_2)\geq f(t_1)$，所以 $f(x)$ 在 R 上单调不减，所以 $x\in R$，$f'(x)=e^x-mx\geq 0$，

①当 $x=0$ 时，(微信公众号：浙江省高中数学)成立；

②当 $x>0$ 时，$m\leq \frac{e^x}{x}$ 恒成立，令 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，易知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e$，所以 $m\leq e$；

③当 $x<0$ 时，$m\geq \frac{e^x}{x}$ 恒成立，易知 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，令 $x\to-\infty, g(x)\to 0$，所以 $m\geq 0$.

综上所述，$m\in[0,e]$.