2026 年中科大少年班及少创班入围考试数学真题

填空题：本大题共 20 个小题，每小题 5 分，满分 100 分

1. 2026 的全体素因子之和为 _____.

2. 若复数 z, w 满足 $z+w=zw=2$，则 $\bar{z}w+z\bar{w}=$ _____.

3. 若 $\tan\theta=3$，则 $\dfrac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=$ _____.

4. 若复数集 $A=\{1,x,y\}$ 与 $B=\{x^2,xy,y^2\}$ 相等，则 $x^{2026}+y^{2026}=$ _____.

5. 向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}-\vec{b}\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角余弦值为 _____.

6. 设 $a\in\mathbb{R}$，$f(x)=(x-2a)^2+1$，若存在 $\mu\in\mathbb{R}$，使得 $f(x)$ 在 $[a,a+2]$ 上的值域为 $[\mu,\mu+2]$，则 a 的取值为 _____.

7. 若 $\forall x\in\mathbb{R}$，$\cos 2x+a\sin x-2a<3$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 _____.

8. 若方程 $\mathrm{e}^x-ax^2=0$ 有且仅有一个实根，则实数 a 的取值范围为 _____.

9. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\mu a_n^2+1$，若数列 $\{a_n\}$ 无上界，则实数 μ 的取值范围为 _____.

10. 在单位正方形内部随机取一点，然后以该点为圆心画一个单位圆，以 X 表示落在该圆内的正方形顶点个数，则 $\mathbb{E}X=$ _____.

11. 设 $a\in\mathbb{R}$. 若命题 A：“以 x 为未知数的方程 $x^2-2ax+1=0$ 有两个不同实根”和命题 B：“$|a|+|a-1|\le 2$”有且仅有一个为真命题，则 a 的取值范围为 _____.

12. 若整数 x,y 满足 $1949x+2026y=1$，则 $|x|$ 的最小值为 _____.

13. 已知数列 $a_n=1+2+\cdots+n$（$n\ge 1$），若将 $\{a_b\}$ 中被 3 整除的数依次排列，所得数列记为 $\{b_n\}$，则 $b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=$ _____.

14. 不等式 $x^2+\sqrt{1-x}\le$ 的解集为 _____.

15. 已知 $x^2+2axy+3y^2+2x+6y+4>0$ 对所有 $x,y\in\mathbb{R}$，则 a 的取值范围是 _____.

16. 若函数 $f(x)$（$x\in\mathbb{R}$）在 $x=1$ 处的切线经过点 $(2,0)$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2}$ 在 $x=1$ 处的导数等于 _____.

17. 设 $n\in\mathbb{Z}$，且 $2\le n\le 2026$，满足存在单位复数 z，使得 $z^n+z^{n-1}+1=0$，则满足条件的 n 的个数为 _____.

18. 设 m 为正整数，若方程 $3x^3-9x^2+m=0$ 三个根都为有理数，则 $m=$ _____.

19. 将一个 n 边形的每个顶点随机染成红、黄、蓝三种颜色之一，且要求相邻顶点的颜色不同，则可能的染色方式有 _____ 种.

20. 给定 5 个正整数，从中任取 4 个数求和，所得的所有和数构成集合 $\{86,92,96,98\}$，则原来的五个数是 _____.

1.1015

$2026 = 2\times1013$.

2.0

$z + w = zw = 2$. ⇒ z, w 为 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 两根, $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$. ⇒ $\bar{z}w = 2i$. 即 $\bar{z}w + z\bar{w} = 0$.

3.$-\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$\sin(\frac{\pi}{3} - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta$ ∴ $\frac{\cos\theta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

4.-1

$A = B \Rightarrow 1\cdot x\cdot y = (xy)^3 \Rightarrow xy[(xy)^2 - 1] = 0$.

(1) $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ or $y = 0$. 不符合 B.

(2) $(xy)^2 = 1 \Rightarrow xy = \pm1$

(i) $xy = 1 \Rightarrow x \neq y \neq \pm1$, 且 $x^2 \neq y^2$, $\{x,y\} = \{x^2, y^2\}$, $\Rightarrow x^2 = y$, $y^2 = x \Rightarrow y^3 = 1$. 即 $y = w$ 或 w^2.

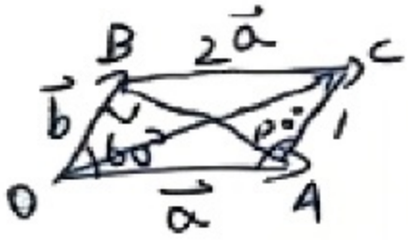
(ii) $xy = -1 \Rightarrow x = -1$ 或 $y = -1$. 此时另一个为 1, 有 $x^2 = y^2$. 舍去.

∴ 只能 $x = w, y = w^2$ 或 $x = w^2, y = w$. 总有 $x^{2026} + y^{2026} = x + y = w + w^2 = -1$.

5、$\frac{5\sqrt{7}}{14}$

如右图. $OC^2 = 1+4 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot2 = 7$.

∴ $\cos\angle COA = \frac{4+7-1}{2\cdot2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$



6. $\{\sqrt{2},2-\sqrt{2}\}$

（1）若 2a<a 即 a<0 时 $f(a)=a^2+1, f(a+2)=(2-a)^2+1$

$\Rightarrow (a-2)^2+1-(a^2+1)=2 \Rightarrow -4a+4=2 \Rightarrow a=1/2$(舍去)

（2）若 $a\le 2a\le a+2$ 即 $0\le a\le 2$ 时 $f(2a)=1, f(a+2)-f(a)=-4a+4$

$\Rightarrow a\ge 1$ 时，$a^2+1-1=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$, $a<1$ 时，$a^2-4a+5-1=2 \Rightarrow a=2-\sqrt{2}$

（3）若 2a>a+2 即 a>2 时 $a^2+1-(a^2-4a+5)=2 \Rightarrow 4a-4=2 \Rightarrow a=3/2$(舍去)

于是只有 $a=\sqrt{2}$或 $2-\sqrt{2}$

7. $(8-4\sqrt{5}, +\infty)$

$cos2x=1-2sin^2x \Rightarrow LHS=1-2t^2+at-2a<3$, $t\in[-1, 1]$

$2t^2-at+2+2a>0$ 任意 $t\in[-1, 1]$，顶点在 t=a/4

(1) $a/4\le -1$，即 $a\le -4 \Rightarrow f(-1)=3a+4>0 \Rightarrow a>-4/3$ 矛盾

(2) $a/4\ge 1$，即 $a\ge 4 \Rightarrow f(1)=a+4>0 \Rightarrow a>-4$ 故 $a\ge 4$

(3) $a/4\in[-1, 1]$, $a\in[-4, 4] \Rightarrow f(\frac{a}{4})=-\frac{a^2}{8}+2a+2>0$

$\Rightarrow a\in(8-4\sqrt{5}, 8+4\sqrt{5}) \Rightarrow a\in(8-4\sqrt{5}, 4]$

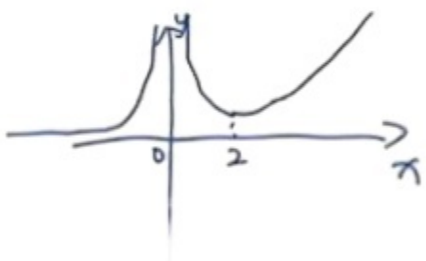
综合可知，$a\in(8-4\sqrt{5}, +\infty)$

8. $(0, \frac{e^2}{4})$

$e^x-ax^2=0$，显然 $x\neq 0$，故 $a=\frac{e^x}{x^2}=g(x)$, $g'(x)=e^x\cdot\frac{x-2}{x^3}$

所以 g 在（$-\infty$, 0）和（2, $+\infty$）上增，在（0, 2）上减

所以 $a\in(0, g(2))$，即 $a\in(0, \frac{e^2}{4})$



9. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

(1)若 $\mu \leq 0$，则 $a_{n+1}=\mu a_n^2+1 \leq 1$，有上界

(2)若 $\mu>\frac{1}{4}$，则 $a_{n+1}>\frac{1}{4}a_n^2+1 \geq a_n$，因为 $(a_n-2)^2 \geq 0$

于是若 $\{a_n\}$ 有上界，由 $\{a_n\}$ 单调增知有极限，设为 A，

故 $A=\mu A^2+1 \Leftrightarrow \mu A^2-A+1=0$，$\Delta=1-4\mu<0$，矛盾。故 $\{a_n\}$ 此时无上界

(3)若 $0<\mu \leq \frac{1}{4}$，设方程 $\mu x^2=x+1=0$ 有实根 $x_1 \leq x_2$，$x_1=\frac{1-\sqrt{1-4\mu}}{2\mu}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2\mu}$，

而 $\frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2\mu} \geq 1 \Leftrightarrow 1-2\mu \geq \sqrt{1-4\mu} \Leftrightarrow 4\mu^2-4\mu+1 \geq 1-4\mu \Leftrightarrow (\mu)^2 \geq 0$，

故 $x_1 \geq 1$，而 $a_1 \in x_1$，若 $a_k \leq x_1$，则 $a_{k+1}=\mu a_k^2+1 \leq \mu x_1^2+1=x_1$，故此时 $\{a_n\}$ 有上界 x_1

综上：$\mu \in \left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

10. π

设 $I_k=\begin{cases}1, & \text{if} A_k\text{落在单位圆内}\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$ $(k=1,2,3,4)$，$A_1A_2A_3A_4$为单位正方形，记 M_k 表示事件 A_k 在单位圆内.

则 $X=\sum_{k=1}^4 I_k \Rightarrow E[X]=E[\sum_{k=1}^4 I_k]=\sum_{k=1}^4 E[I_k]=\sum_{k=1}^4 P(M_k)$

考虑 $P(M_k)$，不妨 $M_k=(0,0)$，则 $I_k=1$

$\Leftrightarrow$ 对点 $K(x,y)$，有$\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$，又 $x \in [0,1], y \in [0,1]$，知 $P(M_k)=\frac{\pi}{4}$(由均匀分布).

$\therefore E[X]=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi.$

11. $(-\infty,-1)\cup\left[-\frac{1}{2},1\right]\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

考虑反面，即 A,B 均假或均真时.

对 A: $x^2-2ax+1=0$. 有不同实根 $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow a^2-1>0 \Leftrightarrow |a|>1$.

对 B: 记 $f(a)=|a|+|a-1|$.

14、$x \in \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \{1\}$.

$x^2 + \sqrt{1-x} \leq 1$. 令$t = \sqrt{1-x} \geq 0$,则$x = 1 - t^2 \leq 1$,

代入有$(1-t^2)^2 + t \leq 1$

$\Leftrightarrow t^4 - 2t^2 + t \leq 0$

$\Leftrightarrow t(t^3 - 2t + 1) \leq 0.$

因式分解得$(t-1)(t^2 + t - 1) \leq 0$,解得$t \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right] \cup \{0\}$

$\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \{1\}$

15、$x^2 + (2ay+2)x + 3y^2 + by + 4 > 0 \quad \forall xy \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (2ay+2)^2 < 4(3y^2 + by + 4) \quad \forall y_1 \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow (3-a^2)y^2 + (6-2a)y + 3 > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a^2 > 0, \\ (6-2a)^2 < 4 \cdot 3 \cdot (3-a^2) \end{cases}$ 或 $3 - a^2$=6−2a=0

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > a^2 \\ (2a-3)a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\epsilon \left(0, \frac{3}{2}\right)$

16、切线为, $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

过$(2,0) \Rightarrow 0 = f'(1) + f(1)$

$g'(x) = \frac{f(x)(x-2) - f(x)}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow g'(1) = -f'(x) - f(x) = 0$

(1) $a \geq 1$ 时，$f(a) = 2a - 1 \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{3}{2} \Rightarrow a \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

(2) $a \in [0,1]$ 时，$f(a) = 1 \leq 2$. 总成立.

(3) $a \leq 0$ 时，$f(a) = 1 - 2a \leq 2 \Rightarrow a \in [-\frac{1}{2}, 0)$.

∴ 综上有 $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \Leftrightarrow B$ 真

$\therefore A$ 假 $\Leftrightarrow a \in [-1,1]$，$B$ 假 $\Leftrightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

⇒ 均假时 $a \in [-1, -\frac{1}{2})$，均真时 $a \in (1, \frac{3}{2}]$

∴ 原答案为（ $\left[-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$ ）$^c = (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

12、421

考虑到$(1949,2026) = (1949,77) = (77,24) = (24,5) = (4,1) = 1$，

由 Bezout 定理，原不定方程有解.

再由辗转相除法理论，代回可得到一组解$(x, y) = (-421,405)$.

通解$(x, y) = (-421 + 2026t, 425 - 1949t), t \in Z$.

考虑$|x| = |-421 + 2026t|$. 显然在$t = 0$ 最小，所求即为 421

13、$\frac{3n(n+1)(2n+1)}{2}$

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$，则 $3 \left| \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 3 \right| n(n+1)$.

由$(n, n+1) = 1$，知 $3|n$ or $3|n+1$，即$n \equiv 0,2(mod3)$.

$n = 3k - 1$ 时，$a_{3k-1} = \frac{9k^2 - 3k}{2}$. $n = 3k$时，$a_{3k} = \frac{9k^2 + 3k}{2}$. 注意$b_{2m-1} = a_{3m-1}, b_{2m} = a_{3m}$，故：

$$\sum_{k=1}^{2n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_{3k-1} + a_{3k}) = \sum_{k=1}^{n} 9k^2 = 9 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{2}$$

14、$x \in \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \{1\}$.

$x^2 + \sqrt{1-x} \leq 1$. 令$t = \sqrt{1-x} \geq 0$,则$x = 1 - t^2 \leq 1$,

代入有$(1-t^2)^2 + t \leq 1$

$\Leftrightarrow t^4 - 2t^2 + t \leq 0$

$\Leftrightarrow t(t^3 - 2t + 1) \leq 0.$

因式分解得$(t-1)(t^2 + t - 1) \leq 0$,解得$t \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right] \cup \{0\}$

$\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \{1\}$

15、$x^2 + (2ay + 2)x + 3y^2 + by + 4 > 0 \quad \forall xy \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (2ay + 2)^2 < 4(3y^2 + by + 4) \quad \forall y_1 \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow (3 - a^2)y^2 + (6 - 2a)y + 3 > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a^2 > 0, \\ (6-2a)^2 < 4 \cdot 3 \cdot (3 - a^2) \end{cases}$ 或 $3 - a^2$=6−2a=0

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > a^2 \\ (2a - 3)a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\epsilon \left(0, \frac{3}{2}\right)$

16、切线为, $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

过$(2,0) \Rightarrow 0 = f'(1) + f(1)$

$g'(x) = \frac{f(x)(x-2) - f(x)}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow g'(1) = -f'(x) - f(x) = 0$

17、 即 $z^{1-n}+1+z=0$

设 $z=e^{i\theta}$.

$\Rightarrow e^{i(1-n)\theta}+1+e^{i\theta}=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos(n-1)\theta+1+\cos\theta=0\\ -\sin(n-1)\theta+\sin\theta=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}1+2\cos\frac{n}{2}\theta\cos\frac{n-2}{2}\theta=0 & ①\\ 2\sin\frac{n-2}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta=0 & ②\end{cases}$

1° $\sin\frac{n}{2}\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{2k\pi}{n}$ $k\in\mathbb{Z}$.

$①\Leftrightarrow 1+2\cos k\pi\cdot\cos\left(1-\frac{2}{n}\right)k\pi=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)k\pi\right)=-\frac{1}{2}(-1)^k$

$\Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{n}\right)k\pi=2m\pi+k\pi+\frac{4}{3}\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{n}\right)k=2m+k+\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{n}k=2m+\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow -k=mn+\frac{2}{3}n$ 存在 m,k，$\Rightarrow 3|n$.

2^0 $\sin\frac{n-2}{2}\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{2k\pi}{n-2}$

$①\Leftrightarrow \cos\frac{nk\pi}{n-2}\cos k\pi=0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{nk\pi}{n-2}=-\frac{1}{2}(-1)^k$

$\Leftrightarrow \frac{nk\pi}{n-2}=\frac{4\pi}{3}+k\pi+2m\pi(m\in z)$

$\Leftrightarrow \frac{2k}{n-2}=\frac{4}{3}+2m$

$\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}(n-2)+m(n-2)$

m,k存在 $\Leftrightarrow 3|n-2$

即要求 n $\equiv 0,2$ 的 n 的个数

在,$2 \le n \le 2026$ 中恰有 $\frac{2026-2+1}{3}=675$ 个

18、即 $3x^3-9x^2+m$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上可分解为一次式之积.

$\Rightarrow$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上也可同样分解（高斯引理）

可拆： $3x^3-9x^2+m=(3x+a)(x+b)(x+c)$， $(a,b,c\in\mathbb{Z})$

$$=3x^3+(3c+3b+a)x^2+(3bc+ab+ac)x+abc$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9=3c+3b+a & ① \\ 0=3bc+ab+ac & ② \end{cases}$$

① $\Rightarrow 3|a$，设 $a=3a_0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -3=c+b+a_0 & ③ \\ 0=bc+a_0b+a_0c & ④ \end{cases}$$

③^2 − 2×④ $\Rightarrow a_0^2+b^2+c^2=9$.

1° $9\in\{a_0^2,b^2,c^2\}$ 必有 0

$\Rightarrow m=0$ 不可能

2° $9\notin\{a_0^2,b^2,c^2\}$

$\Rightarrow$ 只能 $\{a_0^2,b^2,c^2\}=\{4,4,1\}$

$\Rightarrow 16=a_0^2b^2c^2=\frac{1}{9}m^2\Rightarrow m=12$.

当 $a_0=-2=b$， $c=1$ 时可取得，故 $m=12$.

19、$[n]$ 为 $\bmod n$ 同余类.

记 $P_n=\{\pi:[n]\to\{0,1,2\}|\text{不存在}\pi(\overline{i})=\pi(\overline{i+1})\}$

构造 $f:P_n\to P_{n-1}\cup P_{n-2}$.

若 $\pi(\overline{n-1})=\pi(\overline{1})$，则令 $f(\pi)\in P_{n-2}$.

$f(\pi)(\overline{i}) = \pi(\overline{i+1})$ $(i = 0,1,\ldots,n-3)$

若 $\pi(\overline{n-1}) \neq \pi(\overline{1})$，则令 $f(\pi) \in P_{n-1}$

$f(\pi)(\overline{i}) = \pi(\overline{i+1})$ $(i = 0,1,\ldots,n-2)$

首先，f 是良定的满射，这很平凡.

对 $\pi \in P_{n-1}$，在此规则下，$|f^{-1}(\pi)| = 1$（插入一个点）

而 $\pi \in P_{n-2}$ 时，$|f^{-1}(\pi)| = 2$

可知 $|P_n| = |P_{n-1}| + 2|P_{n-2}|$

$P_2 = P_3 = 6$. 特征根（$x^2 - x - 2$ 的解为 $2, -1$）

$\Rightarrow P_n = 2^n + 2(-1)^n$

20、设$\{x_1, x_2, \cdots, x_5\} \xrightarrow{\text{选 4 求和}} \{a_1, a_2, \cdots, a_5\}$, a_i有重复

$\sum a_i = 4\sum x_i \equiv 0 \pmod 4$

$\{86,92,96,98\} \equiv \{2,0,0,2\} \pmod 4$

$\Rightarrow$ 重复值为 92 或 96，记为 4t, t = 23,24

$\overline{\sum x_i} = \frac{1}{4}\sum a_i = \frac{1}{4}(86 + 92 + 96 + 98 + 4t) = t + 93$

$t = 23$ $(x_i) = (30,24,24,20,18)$

$t = 24$ $(x_i) = (31,25,21,21,19)$