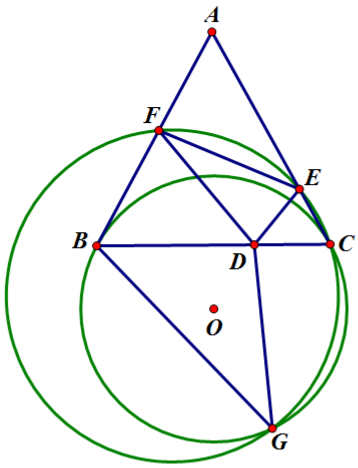
2024 年第21届中国西部数学邀请赛
第一天

1. 对正整数 n，记 $S_n = 1^{2024} + 2^{2024} + \cdots + n^{2024}$. 证明：存在无穷多个正整数 n，使得 S_n 不是 1865 的倍数，而 S_{n+1} 是 1865 的倍数.

2. 求所有的整数 k，使得存在整数数列 $\{a_n\}$，同时满足：
(1) 对任意正整数 n，$a_{n+1} = a_n^3 + ka_n + 1$；
(2) 存在正实数 M，使得对任意正整数 n，$|a_n| \leq M$.

3. 如图，设 AB, AC 是圆 O 的两条切线，B, C 是切点. 点 D, E, F 分别在线段 BC, CA, AB 上，满足 $AF < AE$ 且 $\angle FDB = \angle EDC$. 设过点 F, E, C 的圆与圆 O 交于 G, C 两点. 证明：$\angle AEF = \angle BGD$.



4. 给定整数 $n \geq 2$. 在 $n \times n$ 方格表的每个小方格中各填入一个不超过 n 的正整数，使得每一行填入的数从左至右不减，每一列填入的数从上至下不减. 若两个有公共边的小方格填入的数相同，则称这两个（无序的）小方格为一个“好对”.

求好对个数的最小可能值.

2024 年第21届中国西部数学邀请赛
第二天

5. 已知凸六边形 P 的所有顶点在一个单位正方形的边上，且所有内角相等. 求 P 的最短边长度的最大可能值.

6. 魔术师和一名观众按如下规则表演一个互动魔术. 有 101 个不同的帽子围成一圈. 魔术开始前，一名观众将一只兔子藏在某个帽子里并选定一个正整数 n. 在魔术表演的每个回合中，魔术师先选定一个帽子，如果帽子里有兔子，则魔术表演结束；如果帽子里没有兔子，那么魔术师蒙上眼睛，观众将兔子从当前的帽子按顺时针方向移动到之后第 n 个帽子里，然后开始下一回合. 魔术师知道观众移动兔子的方式，但不知道 n 的值. 证明：魔术师可以制定一个策略，经过不超过 201 个回合找到兔子.

7. 设正整数 a,b,c,d 满足 $a>b>c>d$，且

$$ab+bc+ca+d^2 \mid (a+b)(b+c)(c+a).$$

求 $ab+bc+ca+d^2$ 的素因子个数的最小值.（素因子的个数计重数，如 12 的素因子个数为 3.）

8. 给定整数 $n \geq 2$. 设 $a_{ij}(1 \leq i,j \leq n)$ 是 n^2 个和为 1 的非负实数. 对 $1 \leq i \leq n$，记 $R_i = \max\limits_{1\leq k\leq n} a_{ik}$；对 $1 \leq j \leq n$，记 $C_j = \min\limits_{1\leq k\leq n} a_{kj}$.

求 $C_1C_2\cdots C_n(R_1+R_2+\cdots+R_n)$ 的最大可能值.