2024 年强基计划校测试题及答案汇编

一、北京大学 2024 年强基计划试题答案

1、数学试题及答案

2023 年北京大学强基计划测试数学试题

备注：考试时间2023年6月29日10:00－11:00，数学总共20道单选题，时间为1个小时，以下为全部试题

1. 定义有理数复数为实部和虚部均为有理数的复数，无理数复数为实部和虚部均为无理数的复数，半有理复数为实部和虚部一个是有理数一个是无理数的复数，已知在复平面内三角形的三个顶点对应的复数均为半有理数，则三角形重心对应的复数是（　　）

A.只能是有理数复数或半有理数复数　　B.只能是无理数复数或半有理数复数

C.只能是半有理数复数　　D.以上选项均不对

2. 已知$i=\sqrt{-1}$，则$1+\cos x+i\sin x-\cos 2x-i\sin 2x+\cos 3x+i\sin 3x=0$在$[0,2\pi]$上的解$x$的个数为______

3. 数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{5}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2-2$，则$[a_{2023}]$除以7的余数是（　　）

A.1　　B.2　　C.4　　D.以上选项均不对

4. 50个队伍进行排球单循环赛，胜一局积1分，负一局积0分，且任取27支队伍都能找到一个全部战胜其余26支队伍和一支全部负于其余26支队伍的，问这50支队伍最少共有（　　）种不同的积分

A.50　　B.45　　C.27　　D.以上选项均不对

5. 函数$f(x)=\min\left\{\sin x,\cos x,-\frac{1}{\pi}x+1\right\}$在$[0,\pi]$上的最大值是________

6. 已知x,y,z均为正整数，且$\dfrac{x(y+1)}{x-1}$，$\dfrac{y(z+1)}{y-1}$，$\dfrac{z(x+1)}{z-1}$均为正整数，则xyz的最大值和最小值之和为________

7. 方程$24x^5-15x^4+40x^3-30x^2+120x+1=0$的实数根的个数有________个

8. 已知集合$S=\{(-1,0),(1,0),(0,1),(0,-1)\}$，甲虫第一天在原点$O(0,0)$，第$n+1$天从第$n$天的位置出发沿向量$\dfrac{1}{4^n}v$移动，其中$v\in S$，用$S_n$表示第$n$天甲虫可能在多少个不同的位置上，则$S_{2023}=$________

9. 一个三角形一条高长度为2，另一条高长度为4，则这个三角形的内切圆的半径的取值范围是________

10. 集合$U=\{1,2,3,\cdots,10\}$，则U的元素两两互素的三元子集个数有________个

11. 三个互不相同的正整数的最大公约数是20，最小公倍数为20000，那么这样的不同正整数组共有________个

12. 集合$U=\{1,2,\cdots,366\}$，则U的互不相交，且各元素之和为17的倍数的二元子集最多有________个

13. 已知点$C\in\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1,\ y\geqslant 0\}$，$A(-1,0)$，$B(1,0)$，延长$AC$至$D$使$|CD|=3|BC|$，那么点$D$到点$E(4,5)$的距离的最小值和最大值之积为________

14. 由$\left[\frac{1^2}{2023}\right],\left[\frac{2^2}{2023}\right],\cdots,\left[\frac{2023^2}{2023}\right]$构成的集合共有________个元素

15. 已知正整数数列a,b,c,d严格递增，且$a+b+c+d$为101的倍数，$d\leqslant 101$，则这样的数组(a,b,c,d)共有_______个

16. 方程$x[x]=6$共有_______个解

17. $R(n)$表示正整数n除以$2,3,4,5,6,7,8,9,20$的余数之和，则满足$R(n)=R(n+1)$的两位数n的个数为________

18. 已知$a<b<c<d$，且x,y,z,t是a,b,c,d的一个排列，则

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2$$

得到的不同数共有________个

19. 已知正整数$x_1<x_2<\cdots<x_9$且$x_1+x_2+\cdots+x_9=220$，则在$x_1+x_2+\cdots+x_5$取到最大值的情况下，x_9-x_1的最小值是________

1 考察复数$z=a+bi$,其中$a,b\in R$.定义:若$a,b\in Q$,则称z是有理复数;若a,b其中一个是有理数,另一个是无理数,则称z是半有理数;若a,b均为无理数,则称z是无理复数.考察复平面,其上有ΔABC,若其三个顶点坐标均为半无理数,求其重心坐标可能的情况.（据说选项分别是有或半,无,无或半,以上都不对）

解:不妨设三个顶点的坐标分别是 $z_1=a+bi, z_2=c+di, z_3=e+fi$.

i) 当 $z_1=\sqrt{3}, z_2=\sqrt{2}, z_3=-\sqrt{3}-\sqrt{2}+i$ 时,其重心对应复数为 $z=\frac{1}{3}i$,为有理复数;

ii) 当 $z_1=\sqrt{3}, z_2=\sqrt{2}, z_3=\sqrt{3}+i$ 时,其重心对应复数为 $z=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}i$ 为半有理数;

iii) 当 $z_1=\sqrt{3}, z_2=\sqrt{2}i, z_3=\sqrt{6}$ 时,其重心对应复数为 $z=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i$ 为无理复数.

因此三种情况均有可能.

2 给定数列 $\{a_n\}$,若 $a_1=\frac{5}{2}, a_{n+1}=a_n^2-2$,求 $[a_{2023}]$ 除以 7 所得的余数,其中 $[\cdot]$ 为取整运算.

解:我们用数学归纳法证明 $a_n=2^{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}$.

i) 当 $n=1$ 时, $a_1=\frac{5}{2}$ 满足题意;

ii) 设当 $n=k$ 时,命题成立,即 $a_k=2^{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}$;则当 $n=k+1$ 时,

$$a_{k+1}=a_k^2-2=(2^{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{2^{k-1}}})^2-2=2^{2^k}+\frac{1}{2^{2^k}}$$,亦满足题意,命题得证.

因此 $[a_{2023}]=2^{2^{2022}}$.注意到 $2^{2022}=4^{1011}\equiv 1 \pmod 3$,即存在正整数 m 使得 $2^{2022}=3m+1$,则

$$[a_{2023}]=2^{2^{2022}}=2^{3m+1}=2\cdot 8^m\equiv 2 \pmod 7$$

3 考察集合 $U=\{1,2\ldots 366\}$,考察其两两不交的二元子集的个数,其中这些二元子集均要求元素之和为 17 的倍数.

解:将这 366 个数按照 mod17 的结果进行统计,结果如下:

Mod17	0	1	2	3	4	5	6	7	8
个数	21	22	22	22	22	22	22	22	22
Mod17	9	10	11	12	13	14	15	16	
个数	22	21	21	21	21	21	21	21	

注意到 0 只能和自身组对,除此之外每个数都只能和它对偶的数组对,将这些组对全部剔除之后,只剩下 0-9 各 1 个数;换句话说,剩下的 356 个数已经完成了两两组对;而剩下的数中余数为 8 和 9 的可以再组成一对,其余 8 个数无法组对.因此所求子集个数最多为 179 个.

4 求关于 x 的方程 $x[x]=6$ 的实数解的个数,其中$[\cdot]$为取整运算.

解:注意到$[x]$为整数,分类讨论即可.经检验当$[x]$取遍 -6 到 6 的所有整数时,算出的 x 均不符合对应的$[x]$的结果,因此原方程无解.

5 考察集合 $U=\{1,2...10\}$,求其满足如下条件的三元子集的个数:子集中元素均两两互素.

解:按是否选到 1 进行分类.

I)若选到 1,则剩下的两个数只需互质即可.

a)若剩下两个数都是奇数,即从 3,5,7,9 中选两个互质的数,共有 $C_4^2-1=5$ 种;

b)若剩下两个数一奇一偶,则需要剔除 $(3,6),(5,10),(9,6)$ 三种情况,共有 $4\cdot5-3=17$ 种.

II)若未选到 1,再按照偶数的个数分类:

c)若不含偶数,则需要从 3,5,7,9 中选 3 个两两互质的的数,显然只有 2 种选法;

d)若含有一个偶数,则根据选出的奇数来分类:

选择 3,5,则偶数可以是 2,4,8,共 3 种;

选择 3,7,则偶数可以是 2,4,8,10,共 4 种;

选择 5,7,则偶数可以是 2,4,6,8,共 4 种;

选择 5,9,则偶数可以是 2,4,8,共 3 种;

选择 7,9,则偶数可以是 2,4,8,10,共 4 种;共 18 种选法;

综上所述,共有 42 个这样的三元子集.

6 在$[\frac{1^2}{2023}],[\frac{2^2}{2023}]...[\frac{2023^2}{2023}]$中,互不相等的数的个数有多少?其中$[\cdot]$为取整运算.

解:我们分两个部分来考虑这个问题,注意到$(n+1)^2-n^2=2n+1$,且当$n\le 1011$时,总有$2n+1\le 2023$成立.因此我们假设$[\frac{x^2}{2023}]=m$,且$x^2=2023m+n$,其中x,m,n都是整数,且$x\le 1011, 0\le n\le 2022$;则$(x+1)^2=x^2+2x+1\le x^2+2023=2023(m+1)+n$,这意味着$[\frac{(x+1)^2}{2023}]\le m+1$.因此在$1\le x\le 1011$之间$[\frac{x^2}{2023}]$的值不会发生跳跃.结合$[\frac{1^2}{2023}]=0$和$[\frac{1011^2}{2023}]=505$可知这包含了506个不同的数;

反之,当$x\ge 1012$时,恒有$2x+1>2023$成立,这意味着

$$(x+1)^2=x^2+2x+1>x^2+2023=2023(m+1)+n$$

正整数$x_1,x_2,\cdots,x_9$满足:

- $x_1<x_2<\cdots<x_9$;
- $x_1+x_2+\cdots+x_9=220$.

  当$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$取得最大值时,求x_9-x_1的最大值.

这是一道陈题,但原题只需求$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$的最大值,而本题还需进一步考虑取等条件.

我们先求最大值.

若$x_5\le 24$,则$x_4\le 23$,$x_3\le 22$,$x_2\le 21$,$x_1\le 20$,于是

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\le 110.$$

若$x_5\ge 25$,则$x_6\ge 26$,$x_7\ge 27$,$x_8\ge 28$,$x_9\ge 29$,于是$x_6+x_7+x_8+x_9\ge 110$,即

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\le 110.$$

综上,有$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\le 110$.

下面考虑取等条件.

从上面的证明过程可以看出,等号成立时$x_5=24$或$x_5=25$.

$x_5=24$时,$x_1=20$,$x_2=21$,$x_3=22$,$x_4=23$.于是

$$\begin{aligned}110 &= x_6+x_7+x_8+x_9\\ &\ge 25+26+27+x_9\end{aligned}$$

即$x_9\le 32$,因此$x_9-x_1\le 12$.

$x_5=25$时,$x_6=26$,$x_7=27$,$x_8=28$,$x_9=29$.于是

$$\begin{aligned}110 &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\\ &\le x_1+22+23+24+25\end{aligned}$$

即$x_1\ge 16$,因此$x_9-x_1\le 13$.

综上，当$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$取得最大值时，x_9-x_1的最大值为为13，此时$x_1,x_2,\cdots,x_9$的取值依次为

$$16,22,23,24,25,26,27,28,29$$

2、语文笔试试题（部分）

（1）宗白华的诗与画的分界。

（2）死亡的赋格诗。

（3）月夜忆舍弟。

二、清华大学 2024 年强基计划试题答案

1、强基数学笔试试题（部分）

2023年清华大学强基计划测试数学试题

备注：考试时间2023年6月28日，数学总共35道不定项选择题，共100分，以下为部分回忆试题，

1. 有六面旗，两面蓝，两面红，两面黄，除颜色外完全相同，从这些旗子中去除若干面（至少一面），从上到下悬挂在同一个旗杆上，可以组成一个信号序列，则不同的信号序列共有多少种？

2. 已知$a,x,k\in R$，$\ln(x+a)-kax=0$对任意的$a\in R$恒成立，求k的最小值

3. 11个黑球，9个红球，依次取出，剩下全是一种颜色就结束，求最后只剩下红球的概率？

4. 三个复数的模分别为1，5，$5\sqrt{2}$，且这三个复数实部虚部均为整数，则这三个复数的积有多少个可能值？

5. 椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=\lambda$，$F$为左焦点，$A,B$为椭圆上两点且$FA=5$，$FB=8$，求直线$AB$的斜率$k$的范围

6. 数列a_n满足$a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=x^{a_n}$，求使该数列$\{a_n\}$有极限的x的最大值

7. 集合$A=\{1,2+3z^2,xy+yz+xz\}$，$B=\{x^2,\ 1+2z^2,(忘记了)\}$，使$A=B$成立的实数组有多少?

8. $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{9}{x+2}+\dfrac{16}{x+3}=(4x+5)(2-x)$有几个正实数解?

9. 复数$z^{11}+z=1$，则以下正确的是（　　）

A.z^6（之类）　　B.z^5（之类）　　C. z^3（之类）　　D.z^{10}（之类）

10. 已知点$M(8,1)$，过点$N(1,0)$的直线l上有一个动点P，则$|PN|+2|PM|$的最小值为________

11. 两个人甲和乙，数字为2~30之间的共29个自然数，现找出两个不同的数，把其和告诉甲，把其积告诉乙。甲说："虽然我不知道是哪两个数，但是肯定乙也不知道"，再问乙，乙说："本来我不知道，但是听到甲说这句话，现在我知道了"甲听到乙说他知道了，然后就说："现在我也知道了"，那么这两个数是多少呢?

12. p,q都为质数，p整除$7q+1$，q整除$7p+1$，有多少组p和q

13. 正整数a,b,c,x,y,z满足：$ax=b+c$，$by=c+a$，$cz=a+b$，则xyz的可能值有（　　）

A.0个　　B.3个　　C.4个　　D.无穷多个

2、自强数学笔试试题及答案（部分）

2023年清华大学强基计划数学测试题

1. 已知$z=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi$，求$\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^4}{1+z^3}+\frac{z^3}{1+z^4}$的值。

2. 已知$\mathrm{Re}\,z\geq 1$，求$\left|\frac{1}{z}+1+i\right|_{\min}$的值。

3. 已知$X^{\lg X}Y^{\lg Y}Z^{\lg Z}=5, X^{\lg Y}Y^{\lg Z}Z^{\lg X}=\sqrt{2}$，求$XYZ$的可能取值。

4. 已知$x,y\in N^*$，且$4x+y$整除$4y+x$，则$\frac{y}{x}$（ ）

A. 所有的和为14.5
B. 所有的和为15.5
C. 可能4组取值
D. 可能5组取值

5. 已知2023可以拆分为几个正整数之和，所有整数中的最大值和最小值相差不超过1有多少种可能（ ）

A. 2024　B. 2023　C. 2022　D. 2021

6. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过右顶点$A$作斜率为$\frac{1}{2}$的直线交$y$轴于$P$，交$C$于$B$，过点$P$作斜率大于$\frac{1}{2}$的直线交$C$于$M$，$N$且$|MP|<|MN|$，求$S_{\Delta APN}:S_{\Delta PBM}$.

7. 已知$ax^3+bx^2+x+1=0(a<0)$恰有两个零点，求$a+b$的取值范围.

8. 已知$|z|=1, zx^2+2\bar{z}x+2=0$，$z$的虚部可能为（ ）

A. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　B. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$　C. 1　D. 0

9. 已知$I_n=(1+\frac{i}{2})(1+\frac{i}{4})(1+\frac{i}{16})\cdots(1+\frac{i}{2^{2^n}})$，求$|I_n|$.

10. 已知$5+6+7+\cdots+n$是完全平方数，则（ ）

A. n的取值有无数个

B. n的最小值小于15

C. n为奇数

D. $n\equiv 4(\mathrm{mod}\,9)$

11. 已知$x^2=4y, M(2,2)$，过M点的直线交抛物线于A,B两点，过A,B两点作抛物线

的切线交与点 P，求 $S_{\Delta ABP}$ 的最小值和 P 的轨迹。

12. 设正数 a,b,c 满足 $(a+b-c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c})=1$，求 $(a^2+b^2-c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2})$ 的最小值

13. 得分去掉一个最高分 30，一个最低分 0，剩下个得分平均数为 10，方差为 1，则求不去掉时的平均分和方差分别为多少？

2023 年清华大学自强计划数学测试题解析

1. 已知 $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，求 $\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^4}{1+z^3}+\frac{z^3}{1+z^4}$ 的值

答案： -2

解： 由题意可知

$$z^7=1\Rightarrow z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1$$

此时

$$\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^4}{1+z^3}+\frac{z^3}{1+z^4}=\frac{z}{z^7+z^2}+\frac{z^3(z^7+z^2)+z^3(1+z^3)}{(1+z^3)(1+z^4)}$$

$$=\frac{1}{z^6+z}+\frac{z+z^3+z^4+z^6}{2+z^3+z^4}=\frac{1}{z^6+z}-\frac{1+z^2+z^5}{2+z^3+z^4}$$

$$=\frac{2+z^3+z^4-(z^6+z)(1+z^2+z^5)}{(z^6+z)(2+z^3+z^4)}=\frac{2(1-z^6-z)}{z^6+z-1}=-2$$

2. 已知 $\mathrm{Re}(z)\geq 1$，求 $\left|\frac{1}{z}+1+i\right|$ 的最小值

答案： $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$

解： 设 $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，此时

$$\left|\frac{1}{z}+1+i\right|=\left|\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}+1+i\right|=\left|\frac{r(\cos\alpha-i\sin\alpha)}{r^2}+1+i\right|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha}{r}+1\right)^2+\left(1-\frac{\sin\alpha}{r}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{r}+2}$$

又

$$r\cos\alpha\geqslant1\Rightarrow\cos\alpha\geqslant\frac{1}{r}\Rightarrow-\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\leqslant\sin\alpha\leqslant\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}$$

于是

$$\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{r}+2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{2\left(\frac{1}{r}-\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\right)}{r}+2}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{r^2-1}}{r^2}+2}$$

令$3-2\sqrt{r^2-1}=t$（$t\leqslant3$），此时

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{r^2-1}}{r^2}+2}=\sqrt{\frac{t}{\frac{(3-t)^2}{4}+1}+2}=\sqrt{\frac{4}{t+\frac{13}{t}-6}+2}\geqslant\sqrt{2+\frac{4}{-2\sqrt{13}-6}}$$

$$=\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}=\sqrt{\frac{14-2\sqrt{13}}{4}}=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

当$t=-\sqrt{13}$时，等号成立

3. 已知$X^{\lg X}Y^{\lg Y}Z^{\lg Z}=5$，$X^{\lg Y}Y^{\lg Z}Z^{\lg X}=\sqrt{2}$，则$XYZ=$________

答案：10或$\frac{1}{10}$

解：由题意可知

$$X^{\lg X}Y^{\lg Y}Z^{\lg Z}=5\Rightarrow(\lg X)^2+(\lg Y)^2+(\lg Z)^2=\lg5\text{①}$$

同理可得

$$X^{\lg Y}Y^{\lg Z}Z^{\lg X}=\sqrt{2}\Rightarrow2(\lg X)(\lg Y)+2(\lg Y)(\lg Z)+2(\lg X)(\lg Z)=\lg2\text{②}$$

①+②可得

$$(\lg X+\lg Y+\lg Z)^2=\lg5+\lg2=1\Rightarrow\lg XYZ=\pm1$$

则

$$ZYZ=10\text{或}\frac{1}{10}$$

4. 已知$x,y\in N^*$，且$4x+y$整除$4y+x$，则$\frac{y}{x}$（　　）

A.所有的和为14.5　　　　B.所有的和为为15.5

C.可能4组取值　　　　D.可能5组取值

答案：B

解： 由题意可知

$$\frac{4y+x}{4x+y}=n\ (n\in N^*)$$

整理可得

$$n=4-\frac{15}{4+\frac{y}{x}}$$

则

$$0<\frac{15}{4+\frac{y}{x}}<\frac{15}{4},\ \frac{15}{4+\frac{y}{x}}\in N^*$$

情形一：当$\frac{15}{4+\frac{y}{x}}=1$时，此时

$$\frac{y}{x}=11$$

情形二：当$\frac{15}{4+\frac{y}{x}}=2$时，此时

$$\frac{y}{x}=\frac{7}{2}$$

情形三：当$\frac{15}{4+\frac{y}{x}}=3$时，此时

$$\frac{y}{x}=1$$

于是

$$\frac{y}{x}\text{的可能值的和为}15.5$$

故正确答案选B

5. 已知2023可以分拆为几个正整数之和，所有整数中的最大值和最小值相差不超过1有多少种可能（ ）

A.2024　　B.2023　　C.2022　　D.2021

答案：B

解： 假设2023可以拆分成n个正整数之和，现在分两类讨论：

情形一：当n整除2023时，此时只有一种分拆，即

$$这n个数每一个都是\frac{2023}{n}$$

原因如下：如果把其中一个数拿出一个m，这个m必定会放进某些$\frac{2023}{n}$中，至少使得某个数大于等于$\frac{2023}{n}+1$，此时这两个数之差为

$$\frac{2023}{n}+1-\left(\frac{2023}{n}-m\right)=1+m>1，不满足题意$$

情形二：当n无法整除2023时，设

$$2023=np+q\ (q<n)$$

此时也只有一种分拆，即

$$q个p+1，n-q个p$$

原因如下：（1）当在m个$p+1$各拿一个1时，为了满足所有整数中的最大值和最小值相差不超过1只能将这m这个数均分成m个1使得m个p变成$p+1$，此时还是

$$q个p+1，n-q个p$$

（2）当在$n-q$个p中拿出m_1个1时，此时一定有某两个数x,y之差出现

$$x-y\geqslant p+1-(p-1)=2>1，不满足题意$$

综上所述：n可以取遍1到2023之间的所有整数，即共有2023种可能。

7. 已知$ax^3+bx^2+x+1=0$（$a<0$）恰有两个零点，求$a+b$的取值范围

答案： $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$

解： 由题意可知

$$a(x-x_1)^2(x-x_2)=0$$

则

$$\begin{cases}2x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ x_1(2x_2+x_1)=\dfrac{1}{a}\\ x_1^2x_2=-\dfrac{1}{a}\end{cases}$$

又$a<0$，则

$$x_1^2x_2=-\frac{1}{a}>0\Rightarrow x_2>0\Rightarrow\frac{1}{x_2}>0$$

此时

$$x_1(2x_2+x_1)+x_1^2x_2=0\Rightarrow x_1x_2+2x_2+x_1=0\Rightarrow x_1=-\frac{2x_2}{x_2+1}$$

又

$$\frac{-\frac{b}{a}}{-\frac{1}{a}}=b=\frac{2x_1+x_2}{x_1^2x_2}，\quad a=-\frac{1}{x_1^2x_2}$$

则

$$a+b=\frac{2x_1+x_2-1}{x_1^2x_2}=\frac{-\frac{4x_2}{x_2+1}+x_2-1}{\frac{4x_2^2}{(x_2+1)^2}\times x_2}$$

$$=\frac{x_2^3-5x_2^2-5x_2-1}{4x_2^3}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x_2^3}-\frac{5}{x_2^2}-\frac{5}{x_2}+1\right)<\frac{1}{4}$$

8. 已知$|z|=1$，$x\in R$，$zx^2+2\bar{z}x+2=0$，z的虚部可能为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C.1　　D.0

答案：ABD

解： 设

$$z=\cos\alpha+i\sin\alpha$$

此时

$$zx^2+2\bar{z}x+2=(x^2\cos\alpha+2x\cos\alpha+2)+i(x^2\sin\alpha-2x\sin\alpha)=0$$

则

$$\begin{cases}x^2\cos\alpha+2x\cos\alpha+2=0\\x^2\sin\alpha-2x\sin\alpha=0\end{cases}$$

情形一：当$x=0$时，此时

$$2=0\text{（矛盾），不满足题意}$$

情形二：当$x\neq0$, $\sin\alpha=0$时，此时

$$\text{当}\cos\alpha=-1\text{，}x=-1\pm\sqrt{3}\text{，满足题意}$$

情形三：当$x\neq0$, $\sin\alpha\neq0$时，此时

$$x=2$$

则

$$4\cos\alpha+4\cos\alpha+2=0\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

故正确答案选 ABD

9. 已知$I_n=\left(1+\frac{i}{2}\right)\left(1+\frac{i}{4}\right)\left(1+\frac{i}{16}\right)\cdots\left(1+\frac{i}{2^{2^n}}\right)$，则$|I_n|=$______

答案： $\sqrt{\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+2}}}\right)}$

解： 由题意可知

$$|I_n|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}=\sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{1-\frac{1}{2^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2^{2^{n+2}}}}{1-\frac{1}{4}}}=\sqrt{\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+2}}}\right)}$$

10. 已知$5+6+7+\cdots+n$是完全平方数，则（　　）

A.n的取值有无数个　　　B.n的最小值小于15

C.n为奇数　　　D.$n\equiv 4(mod\ 9)$

答案：ABD

解： 由题意可知

$$\frac{(n+5)(n-4)}{2}=m^2$$

整理可得

$$(2n+1)^2-8m^2=81$$

此时

$$n=\frac{9\left[(3+2\sqrt{2})^k+(3-2\sqrt{2})^k\right]-2}{4}$$

当$k=1$时，$n=13$，当$k=2$时，$n=76$，$n\equiv 4(mod\ 9)$，故正确答案选 ABD

11. 已知$x^2=4y$，$M(2,2)$，过M点的直线交抛物线于A,B两点，过A,B两点作抛物线的切线交于P点，求$S_{\triangle ABP}$的最小值和P点的轨迹

答案：$\triangle ABP$**面积的最小值为**4**，点**P**的轨迹方程为**$y=x-2$

解： 设直线AB的方程为$y=k(x-2)+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立

$$\begin{cases}y=k(x-2)+2\\x^2=4y\end{cases}$$

整理可得

$$x^2-4kx+8k-8=0$$

由韦达定理可知

$$x_1+x_2=4k，\ x_1x_2=8k-8$$

切线AP方程为$y=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)+y_1=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2$，切线$BP$方程为$y=\frac{1}{2}xx_2-\frac{1}{4}x_2^2$，

联立

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}xx_1-\frac{1}{4}x_1^2 \\ y=\frac{1}{2}xx_2-\frac{1}{4}x_2^2 \end{cases}$$

解得

$$x_P=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=2k，\ y=\frac{1}{2}x_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{4}x_1x_2=\frac{1}{4}(8k-8)=2k-2$$

则

$$P\text{的轨迹方程为}y=x-2$$

此时

$$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|x_2-x_1|\left|\frac{y_1+y_2}{2}-y_P\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{16k^2-4(8k-8)}|2k^2-4k+4|$$

$$=4\sqrt{k^2-2k+2}(k^2-2k+2)\geq 4\sqrt{1}\times 1=4$$

当$k=1$时，等号成立

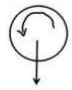
3、物理笔试试题（部分）

自主选拔在线
www.zizzs.com
专注中学拔尖人才培养

清华大学 2023 年强基计划物理试题（回忆版）

物理共 20 题，60 分。均为不定项选择题。部分答对得部分分，错选不得分。

1. 一个乒乓球在下落的同时发生着如图所示的转动，考虑气流影响，判断乒乓球是否会发生偏移，是向左偏还是向右偏。为什么？



2. 有一个圆锥摆，细杆上有一个小圆环，做摆动。过程中由杆环地球组成的系统能否能量守恒，小圆环滑到杆最低端卡主时，角速度θ如何变化？以及距离它垂直轴的半。

3. 受科里奥利力影响，水平运动物理如何偏移。

4. 动量的变质量问题：铲雪车铲雪，每前进 1 米铲起 0.5kg 的雪，求运动情况。铲到 2kg 雪后的加速度，铲到 10kg 雪后的加速度。

5. 求同心球壳电容：一个半径为 R 的球壳带电 Q，里面有个半径为 r 带电 q。

6. 电势：在电容器中间插入一个带电 Q 的薄板，求薄板的电势。

7. 电介质：一个无限场的螺线管，里面是磁介质，中心有空腔，问截止和空腔中的磁场强度 H、磁感应强度 B、此话强度 M 的关系。

8. 有一个内半径为 R 的空心双层球壳，在距离球心为 d 的位置放一个带正 q 的点电荷，最外层球壳接地，接地之后再断开。问这个时候球心的电势是多少。

9. 直杆做圆锥摆动，杆上有小环下滑，问初末态角速度。

10. 将自感线圈 L 的中间剪开，问分开的电感。

11. 时间反演下的运动，速度和加速度怎么变。

12. 关于磁矩的问题。

13. 关于动能定理的问题。

以上试题为考生回忆版，更多试题还在整理中，欢迎联系自主选拔在线赫敏老师（微信：zizzs2018）提供更多试题。

4、论述笔试试题（部分）

（1）你的志愿以及对该专业的理解。（500 字）

（2）你心目中高中以及大学的区别，以及对于大学的规划。（500 字）

三、复旦大学 2024 年强基计划试题答案

1、数学笔试试题（部分）

1.十六进制下，求 $\dfrac{FEDCBA987654321-1}{123456789ABCDEF+1}$ 的值，其中 A=10,B=11,C=12,D=13,E=14,F=15.

2.方程 $5^x-3^{2-x}=1$ 有几个实数解？

3.若立方体、球体、等边圆柱（轴截面为正方形）的体积相等，是比较三个几何体的全面积大小。

4.已知 f(x)是 5 次多项式，若 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}, k=0,1,2,3,4,5$，求 f(6)。

2、面试试题（部分）

复旦大学强基计划面试采用四对一面试模式，四个教授对一个学生，考试需要做 1 分钟自我介绍，整个面试过程 15 分钟。面试基于考生自我介绍展开，提问涉及所报专业及兴趣特长等，对考生思维能力要求较高。真题：

（1）当今社会上人与人的关系为什么会变得冷淡？

（2）你读过哲学相关的书籍吗?列举一些书目，并谈谈你的感受。

四、上海交通大学 2024 年强基计划试题答案

1、数学笔试试题（部分）

上海交通大学 2023 年强基计划部分初试试题（回忆版）

1. 已知 $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，则 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(2\vec{b}-\vec{c}\right)$ 的最小值为（　）

A. $3+\sqrt{3}$　　B. $3-\sqrt{3}$　　C. $2+\sqrt{2}$　　D. $2-\sqrt{2}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\left(n\in N^*\right)$，记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则（）

3. $a=\log_5^{\ 3}$，$b=\log_8^{\ 5}$，$c=\log_{13}^{\ 8}$，已知 $5^5<4^8, 8^5>4^{13}$，求 a,b,b 的大小顺序

……更多试题，陆续整理中

2、物理笔试试题（部分）

题 10 双缝干涉实验中用一折射率为 $n(n>1)$ 的玻璃砖遮住上面的一条单缝，问干涉条纹怎么变（　）

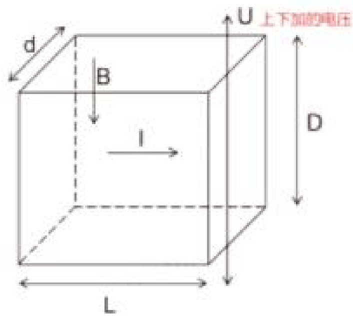
A. 条纹上移

B. 条纹下移

C. 条纹变宽

D. 条纹变窄

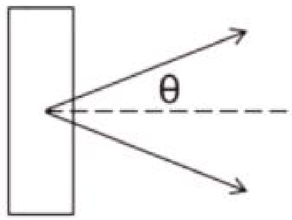
题 11 有一道考霍尔系数的



题 12 有一道较为复杂的关于元素半衰期的问题

题 13： 磁聚焦模型

发射粒子，偏离角度 $\theta < 5°$，磁场强度为 B，已知从一端到另一端历时 T，求比荷.



五、南京大学 2024 年强基计划试题答案

1、数学笔试试题（部分）

1

题 1 平分 $x^2-2x+y^2-4y=0$ 的直线不经过第四象限，求斜率的范围.

题 2 已知 $x,y\in[0,1]$，则 $x^2+y^2\le 1$ 且 $(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$ 的概率是?

题 3 在 1,2,3,4,5 当中，有放回地取数字三次，最小为 2 的概率.

题 4 $\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}=1$，则 $\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}$.

题 5 满足不定方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{30}$ 且 $x\le y$ 的正整数解的组数.

题 6 实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根 α 和 β 满足 α 是虚数，$\frac{\alpha^2}{\beta}$ 是实数，则 $\frac{\alpha}{\beta}$.

题 7 已知 $a>0,b>0,x+y=c$，则 $\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}$ 的最小值.

题 8 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+3k+2,n\right)$，求 $f(100)$.

题 9 三角形的三边记为 a,b,c，满足 $a^2+b^2+c^2=\alpha, a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\beta$，求三角形面积.

题 10 用 a_n 表示 n 在三进制下的各数字之和，例如 $a_7=3,a_9=1$，记 $S=\{a_n \mid a_n=5,1\le n\le 2023\}$，求 $|S|$.

题 11 与高斯函数有关.

题 12 与欧拉函数有关.

2、物理笔试试题（部分）

（1）包含电路开关断开前后电荷量比值

（2）热学多方过程，压强与体积的五次方是定值，求体积从 v0 增大一倍的吸热

（3）卡西米尔效应

（4）爱因斯坦转盘，再次非闵度规下圆周率与Π的关系

（5）磁场题（高考难度）

（6）光楔成像公式

（7）量子理论的简单概念

（8）考虑离心势能下水流从小孔流下的速度

（9）在斜面上平抛离斜面的最远距离

（10）求电子在磁场中的运动速度，给了圆周半径，需要记住元电荷的值（高考难度）

3、面试试题（部分）

南京大学 2023 年强基计划面试为多对一半结构化面试。面试围绕学科专业知识素养等进行提问，会涉及高分子材料等话题，对专业、学科层面考察力度较大。

（1）静止电子能否完全吸收光子?说出原理

（2）正负电子湮灭能否产生相同频率的光子?算出波长。该波长在哪个区间（紫外红外可见光）？

（3）数学家陈景润发现过什么?

（4）你知道质数吗?质数与合数有什么区别?你知道有关质数的定理吗?

六、中国科学技术大学 2024 年强基计划试题答案

1、数学笔试试题及答案（部分）

备注：考试时间2023年6月11日，考试时间90分钟，一共是八道题目，四道填空题，四道解答题，

一、填空题

1. 二元函数$f(x,y)=(x+\cos y)^2+(2x+3+\sin y)^2$的值域是________

答案： $\left[\frac{14-6\sqrt{5}}{5},+\infty\right)$

解： 由题意可知二元函数$f(x,y)$的几何意义为

单位圆上$(-\cos y,-\sin y)$一点A到函数$y=2x+3$上一点B距离的平方

此时

$$|AB|_{\min}^2=\left(\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right)^2=\frac{14-6\sqrt{5}}{5}$$

则

$$f(x,y)\in\left[\frac{14-6\sqrt{5}}{5},+\infty\right)$$

2. 设复数z满足$|z|=1$，则$\omega=\frac{z+1}{z-1}$，则$\left|\frac{1}{\omega^2}+4\omega^2\right|$的最小值为________

答案： 4

解： 设$z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，此时

$$\omega=\frac{\cos\alpha+1+i\sin\alpha}{\cos\alpha-1+i\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha+1+i\sin\alpha)(\cos\alpha-1-i\sin\alpha)}{(\cos\alpha-1+i\sin\alpha)(\cos\alpha-1-i\sin\alpha)}=\frac{i\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$$

则

$$\omega^2=\frac{i^2\sin^2\alpha}{(\cos\alpha-1)^2}=\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha-1}$$

于是

$$\left|\frac{1}{\omega^2}+4\omega^2\right|=\left|\frac{\cos\alpha-1}{1+\cos\alpha}+\frac{4(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha-1}\right|=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{4(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}\geqslant 2\sqrt{4}=4$$

3. 求正整数n的值，使得$(1+2x)^{2023}$展开式中x^n的系数最大

答案： 1349

解： 由题意可知x^n的系数为

$$a_n=2^nC_{2023}^n$$

则

$$\begin{cases}a_n>a_{n-1}\Rightarrow 2^nC_{2023}^n>2^{n-1}C_{2023}^{n-1}\\ a_n>a_{n+1}\Rightarrow 2^nC_{2023}^n>2^{n+1}C_{2023}^{n+1}\end{cases}$$

解得

$$\frac{4045}{3}<n<\frac{4048}{3}$$

此时

$$n=1349$$

4. 抛物线$y=x^2+a$，$y=-x^2-a$都与$x=y^2+a$，$x=-y^2-a$相切，求中间所围的封闭图形面积

答案： $\dfrac{1}{3}$

解： 由题意可知：$a>0$，再由对称性可知：切点处的切线经过坐标原点，设$y=x^2+a$，$x=y^2+a$的切点为(x_0,y_0)，此时切线的方程为

$$y=2x_0(x-x_0)+x_0^2+a$$

由对称性可知：切线一定过坐标原点，令$x=y=0$，则

$$x_0^2=a\Rightarrow x_0=\sqrt{a}$$

于是

$$2a=\sqrt{a}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

此时切点为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则

$$S_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)dx-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{x-\frac{1}{4}}\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

此时

$$S=4S_1=\frac{1}{3}$$

二、解答题

5. 已知实系数函数$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，当$x\in[-1,1]$时，恒有$|f(x)|\leqslant|x+1|$，证明：$f(x)=0$的根均为实数

证明： 由题意可知

$$|f(-1)|\leqslant 0\Rightarrow f(-1)=0\Rightarrow -1+b-c+d=0\Rightarrow d=c+1-b$$

则

$$f(x)=(x+1)(x^2+(b+1)x+c-b+1)$$

此时

$$|f(x)|\leqslant|x+1|\Leftrightarrow|g(x)=x^2+(b+1)x+c-b+1|\leqslant 1$$

令$x=-1$，此时

$$|c-2b+1|\leqslant 1\Rightarrow -2\leqslant c-2b\leqslant 0$$

令$x=1$，此时

$$|3+c|\leqslant 1\Rightarrow -4\leqslant c\leqslant -2$$

于是

$$-6\leqslant 2c-2b\leqslant -2\Rightarrow -3\leqslant c-b\leqslant -1\Rightarrow -2\leqslant c-b+1\leqslant 0$$

则

$$g(0)\leqslant 0$$

所以

$$f(x)=0\text{的根均为实数}$$

6. 已知正整数数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，$a_1=b_1=1$，且$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，数列$\{c_n\}$满足：$c_n=a_n+b_n$，若存在正整数k满足$c_k=37$，$c_{k+2}=307$，求数列$\{c_n\}$的通项公式

答案： $c_n=6^{n-1}+30n-29$

解： 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，此时

$$c_n=1+(n-1)d+q^{n-1}$$

则

$$c_k=1+(k-1)d+q^{k-1}=37\Rightarrow(k-1)d+q^{k-1}=36$$

$$c_{k+2}=1+(k+1)d+q^{k+1}=307\Rightarrow(k+1)d+q^{k+1}=306$$

情形一：当$k=1$时，此时

$$2=36\text{，矛盾}$$

情形二：当$k=2$时，此时

$$\begin{cases}d+q=36\\3d+q^3=306\end{cases}$$

则

$$q^3-q=198\Rightarrow(q-6)(q^2+6q+33)=0\Rightarrow q=6$$

此时

$$c_n=6^{n-1}+30n-29$$

情形三：当$k=3$时，此时

$$\begin{cases}2d+q^2=36\\4d+q^4=306\end{cases}$$

则

$$q^4-2q^2=234\Rightarrow q^2=\sqrt{235}+1\text{（舍）}$$

情形四：当$k=4$时，此时

$$\begin{cases}3d+q^3=36\\5d+q^5=306\end{cases}$$

则

$$q^3<36\Rightarrow 1<q\leq 3,\ 3d<36\Rightarrow 0<d<12$$

此时

$$5d+q^5<3^5+60=303<306\text{，不满足题意}$$

情形五：当$k=5$时，此时

$$\begin{cases}4d+q^4=36\\6d+q^6=306\end{cases}$$

则

$$q^4<36\Rightarrow 0<q\leq 2,\ 4d<36\Rightarrow 0<d<9$$

此时

$$6d+q^6<2^6+54=118<306\text{，不满足题意}$$

情形五：当$k\geq 6$时，则

$$0<q\leq 2,\ 0<d<9$$

此时

$$(k-1)d+q^{k-1}=36$$

则

$$\begin{aligned}&(k+1)d+q^{k+1}=(k-1)d+2d+q^{k-1}q^2\\&<(k-1)d+18+4q^{k-1}<4\times 36+18=162<306\end{aligned}\text{，不满足题意}$$

综上所述：$c_n=6^{n-1}+30n-29$

7. 一个箱子里有m个黑球和n个白球（$m<n$），从箱子中不放回的每次抽取一个球，直到取完，记$P(m,n)$为整个取球过程中，箱子中黑球个数始终小于白球个数的概率

（1）$P(2,4)$

（2）$P(m,n)$的表达式

答案：（1）$\frac{1}{3}$；（2）$P(n,m)=\frac{n-m}{n+m}$

解：（1）情形一：当第一次取的是黑球时，此时第二个黑球可以在第二次，第三次，第四次取到，一共三种方式

情形二：当第一次取的黑球是在第二次取到时，此时第二个黑球可以在第三次，第四次，一共两种方式，此时共有

$$3+2=5\text{种方式}$$

于是

$$P(2,4)=\frac{5}{C_6^2}=\frac{1}{3}$$

（2）设点$A(m,n)$，直线$y=x$，取一个黑球向左走一个单位，取一个白球向下走一个单位，最终要回到原点$O(0,0)$，箱子中黑球个数始终小于白球个数的种数就是从点A开始，永远在$y=x$上方的路径种数，此时最后一个到达的点是$B(0,1)$，即共有

$$C_{n+m-1}^{m}\text{种}$$

但是上述情况中包括了出现在$y=x$上和$y=x$下方的路径种数，假设第一次走到$y=x$这条直线的点C，再从C到B，此时的路径为$A\to C\to B$，这个是不满足题意的路径，设点$D(1,0)$，由对称性可知：此时$A\to C\to B$的路径数与$A\to C\to D$的路径数一样，即共有

$$C_{n+m-1}^{m-1}\text{种}$$

则

$$P(n,m)=\frac{C_{n+m-1}^{m}-C_{n+m-1}^{m-1}}{C_{m+n}^{m}}=\frac{n-m}{n+m}$$

8. 求证：

$$\frac{1^2}{n^2+1^2}+\frac{2^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\leqslant\frac{n^2+2n}{4n+2}$$

证明： 要证

$$\frac{1^2}{n^2+1^2}+\frac{2^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\leqslant\frac{n^2+2n}{4n+2}$$

即证

$$n-\left(\frac{n^2}{n^2+1^2}+\frac{n^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)\leqslant\frac{n^2+2n}{4n+2}$$

等价于证

$$\frac{3}{4n+2}\leqslant\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}$$

由柯西不等式可知

$$\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\geqslant\frac{n^2}{n^3+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

$$=\frac{6n}{6n^2+(n+1)(2n+1)}=\frac{6n}{8n^2+3n+1}$$

只需证

$$\frac{6n}{8n^2+3n+1}\geqslant\frac{3}{4n+2}\Leftrightarrow n\geqslant 1$$

显然成立，证毕！

2、物理笔试试题（部分）

1. 一个滑块从坡底（光滑）向上滑，同时抛出一小球，两者在滑块到达最高处时相遇，已知倾斜角θ,滑块初速度为 v，求小球抛出大小方向。

2. 绝热气缸内壁光滑，活塞质量 m，重力加速度 g，活塞下封闭有单原子气体，初态压强 p（不计大气压），活塞下表面与气缸底面为金属面（构成平行板电容器 $h<\sqrt{s}$，s 为气缸截面积），气体认为为ε r=1 的电介质，将电容器接入电路，电源电压ε，电阻 R，开关初始断开，活塞到底面距离 h，闭合后一段时间稳定，求此时活塞到底面距离。

3. 一平行板电容器，电容为 c 接在电源为 v 的电池两端，内部有一个金属小球（半径很小），质量 m，小球每次与极板碰撞均为完全非弹性碰撞，失去所有电荷，并获得与所碰撞极板相同电性电量 q，碰撞损失能量均转化为热量放出，如此在极板间往复运动，极间距为 d

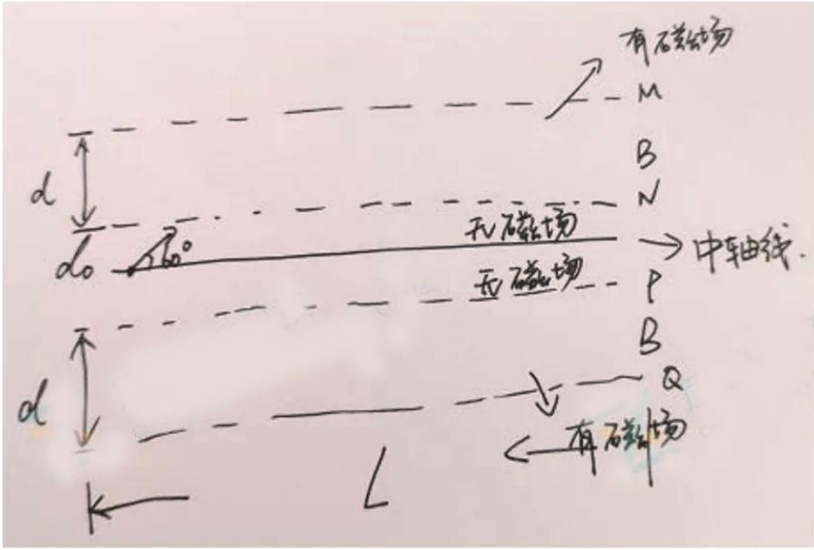
（1）等效电流

（2）单位时间放热

4. 在真空中存在如图磁场，一带电粒子质量 m，电荷量为 q，从无磁场区域左边缘重点，以与中轴线夹角 60°的速度 v 射出。

（1）若粒子恰从 Q 点射出，求磁场大小

（2）若粒子从 P 点射出，则有多个可能的磁场值实现这一结果，求其中最小的磁场大小。



5. 玻璃球折射率 n > n0（n0 为真空折射率），一个γ为 r 光子打入，入射方向延长到圆心距离为 L，球半径 R，求玻璃球对光子平均力。

6. 光电效应的历史故事，参考数据：电子质量，mc^2=

元素			Na		Cs
逸出功					

（1）一个能量为？的光子，打到以上表材料做成的金属板上，可射出的光电子的材料有哪些？

（2）光电子在真空中自由飞行能否辐射光子，并证明

（3）题 1 中能量最高的光电子对应的德布罗意波波长

（4）题 2 中能量最低的电子打到靶核上，韧致辐射的最短波长

3、面试试题（部分）

中国科学技术大学 2023 年强基计划面试仍然为无领导小组讨论形式。考生围绕给定材料话

题进行自由讨论，然后发表意见。话题涉及学科前沿技术等，重点考察兴趣志向、学科特长等方面内容。

（1）数据的商业价值是什么？

（2）地球上的树会长到月球上吗，为什么？

七、浙江大学2024年强基计划试题答案

1、数学笔试试题（部分）

2023年浙江大学强基计划测试数学试题

备注：考试时间2023年6月12日

1. 已知$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\dfrac{\left(1+\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}\right)^2}{\cos\alpha+\cot\beta}$的最大值为________

2. $|2^x3^y-2^u5^v|=2$的正整数解(x,y,u,v)个数为________

3. $A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,2023\}$，$A\cap B\cap C=\phi$，设满足条件的集合数$A,B,C$为$n$时，则十进制下$n$的最后2位数为_______

4. 2023支球队循环赛，2队一场，胜队得3分，负得0分，平局各加1分，赛后各队总分构成$d=1$得等差数列，则最后一名的分的最大值为_______

5. 已知$x,y\in N^*$，且$x,y\in[1,1897]$，且$\left[\frac{x}{y}\right]+1$为$x$的倍数，则整数对$(x,y)$个数为（　）

A.2898　　B.3793　　C.4686　　D.5133

6. 四边形$ABCD$外切于圆O，过O直线交AB, CD, AC, BD于K，L, M, N，且$\angle BKL=\angle CLK$，$AM=1$，$MC=2$，$BN=3$，则$ND=$________

7. 已知正整数n满足，对任意等差数列a_1，a_2，$\cdots$，a_n，若$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$为有理数，则$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$中有一个有理数，则$n$可以为（　　）

A.6　　　B.8　　　C.10　　　D.12

8. 已知正n边形顶点中任取3点，构成钝角三角形的概率为$\dfrac{93}{125}$，则n的可能值得和为（　　）

9. 过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）得右焦点作互相垂直得弦$AC$，$BD$，已知四边形$ABCD$的面积为$\left[0,\dfrac{25}{2}\right]$，则$\dfrac{a}{b}=$（　　）

10. $f(x)=x^2-2x-14\sqrt{x-1}+x\sqrt{x^2-4x-28\sqrt{x-1}+61}$的最小值为______

11. 设虚数a,b,c有$|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$，则$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|$的最大值为______

12. 下列正确的是（　　）

A.自然数集合与有理数集合无双射　　B.有理数集合与实数集合间不双射

C.实数集合与整数集合间无双射　　D.上面都不对

13. 已知$\{a_n\}$有$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1-\sqrt{2})^{n+1}a_n+\sqrt{2}+1}$（$n\in N^*$），则$\lim\sqrt[n]{a_n}=$

14. 求 $\dfrac{\tan 96^\circ-\tan 12^\circ\left(1+\frac{1}{\sin 6^\circ}\right)}{1+\tan 96^\circ\tan 12^\circ\left(1+\frac{1}{\sin 6^\circ}\right)}=$（　　）

15. $\{x_n\}$ 有 $x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2x_n^2+1}$，则 $[2\lg x_{2023}]=$（　　）

16. 已知五位数 n 有 $2556\mid(n^3-1)$，则 n 的各位数字之和的最小值为（　　）

17. 已知 $n\in\mathbf{N}^*$，且存在正整数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n，使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=n$$

则满足条件的 n 的个数为______.

18. 已知多项式 $f_n(x)$（$n\geq 0$）满足 $f_0(x)=1$，当 $n\geq 1$ 时，$f_n(0)=1$；当 $n\geq 0$ 时，$\dfrac{d}{dx}f_{n+1}(x)=(n+1)f_n(x+1)$，则 $f_{100}(2023)$ 的最后 2 位数是______.

2、文科笔试试题（部分）

2023 年浙江大学强基计划真题（文科）

文科：共 14 页试卷

包括 50 道语文（前 25 题 1 分题，后 25 题 3 分题）；50 道历史（前 25 题 1 分题，后 25 题 3 分题）；100 题 200 分

1.中国文学中“文学”的含义是计么?

2.隋唐时期的“莫缘可汗”是谁?

3.中国古代的“无愁天子”是谁?

4.不是以形声法造字的字是：

5.“我”的含义?

6.浙大校歌中“___________”出自哪部文学经典?

7.史学界大部分认为夏朝历史从公元前_____年开始?

8.杭州亚运会历史

9.下列哪个诗句描述的与杭州无关?

10.”与你有什么关系“后面家的标点符号正确的是？为什么?

11.鲁迅唯一一部写有关青年爱情婚姻的小说是?

12.下列哪部书不属于通俗文学?

13.下列与”见怪“所用构词法不同的是?

14.谁翻译过《莎士比亚》

15.北魏设置的六卫（防柔然）

16.西夏的防卫

17.汉朝的”道“管辖范围

18.离骚的意思

19.诗经分为_____、_____、______。

20.中世纪长鞋，贵族专属

21.古埃及人对墓葬的来世的追求

22.世界第一个商品交易所

23.边城

24.近现代作家与笔名

3、面试试题（部分）

浙江大学 2023 强基计划面试为多对多群面，1157 人进入面试。包含自我介绍，必答题和自愿回答问题等。问题涉及报考专业的发展、探究性学习、学科能力等。着重考查学生的理想信念、专业志向、兴趣特长、思维能力和创新潜质。

（1）对你影响最深的人是谁？为什么？(可以是伟人或者身边的人)

（2）高中的生活和大学不一样，要求你自律，到了大学你会如何做一个自律的人？

（3）请你谈谈温室效应对农作物的影响。

（4）请你分别说说为什么蝴蝶翅膀和荷叶不沾水。

（5）谈谈新冠核酸检测和抗原检测的区别。

（6）你对强基计划的理解是什么样的？

八、西安交通大学 2024 年强基计划试题答案

1、数学笔试试题（部分）

1. 设集合 X 有 m 个元素，集合 Y 有 n 个元素，求集合 $X\times Y$ 有多少子集，并说明理由.

2. (1) 证明 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

(2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$ 一定成立吗？并说明理由.

3. $R=\{(x,y)\mid x+y=6, x,y$ 为正整数$\}$. $S=\{(x,y)\mid xy+x=30, x,y$ 为正整数$\}$.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，求$S^{-1}(A)$.

(2) 求 R^{-1} 与 $S\circ R$.

4. 设 X,Y,Z,W 为四个集合，R 为 X 到 Y 的一种关系，S 为 Y 到 Z 的一种关系，T 为 Z 到 W 的一种关系.

证明:(1) $(R^{-1})^{-1}=R$

(2)$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$

(3)$T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$

5. $\Omega=\{R\in X\times X|X$为非空数集且对任意$S\in X\times X$均有$R\circ S=S\circ R\}$.

证明:$\Omega=\{\varnothing,\Delta\}$ 其中$\Delta=\{(x,x)\mid x\in X\}$.

2、面试试题（部分）

面试模式：五名考官对六名考生结构化面试+三对三辩论面试

面试情况：面试分模块进行：中/英语自我介绍(2 分钟)、人文素养、科学素养 、自由论、心理问答。主要考查考生的学科兴趣、学科特长、创新潜能和综合素质等。

（1）概率论和统计学有什么区别和关系？

（2）一维是线，二维是面，三维，四维是什么？高维研究有什么意义？

（3）随机变量的独立性和不相关是否等价？在什么情况下等价？

（4）自由辩论：人工智能会增加就业还是减少就业？

（5）人文素养："君子深造之以道，欲其自得之也。自得之，则居之安；居之安，则资之深；资之深，则取之左右逢其原。故君子欲其自得之者也。"孟子的学习目的和学习方法是什么？

（6）人文素养：谈谈对于"大学之道，在明明德，在亲民，在止于之善"这句话的理解。

九、山东大学 2024 年强基计划试题答案

1、数学笔试试题（部分）

2023 年山东大学强基计划测试数学试题

备注：2023 年7 月2 日，**数学总共**10 **道题，考试时间为**60 **分钟，以下为部分试题**

1. 已知p,q为正整数，$p>q$，证明：$\dfrac{p}{q}$为有限小数或无限循环小数

2. S_1为有限集，$S_n=\{x|x^n,\ x\in S_1,\ n\in N^*\}$，$S=\{x\in C|x^k,\ x\in S_1,\ k\in N^*\}$，证明：$S$是有限集，当且仅当$\exists\, m$为正整数，令$S_n+m=S_n$对$\forall n$恒成立

3. 已知点$A(x,y)$满足$|5x+6y|+|9x+11y|\leq 2$，求点A围成的面积

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$2S_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，则$a_{50}=$________

5. 已知$A\cup B=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}\}$，$A\cap B=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，则$(A,B)$共有多少组？

6. $\triangle ABC$中，a,b,c成等比数列，求$\dfrac{\sin A\cot C+\cos A}{\cot C\sin B+\cos B}$的范围

十、中山大学 2024 年强基计划试题答案

1、数学笔试试题及答案（部分）

第一题

已知$n \in \mathbb{N}^*$，求$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$

第二题

求证：7不整除2^n+1，$n \in \mathbb{N}^*$

第三题

解方程

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$$

第四题

解不等式

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$$

分析：中学求和无非是等比等差类型或裂项类型的，本题不是等差等比数列，所以尝试裂项求和

解：显然：$[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]=[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}]$

根据取整符号的性质有：$[\frac{x+1}{2}]+[\frac{x}{2}]=[x]$

所以 $[\frac{2n}{2^{k+1}}]-[\frac{n}{2^{k+1}}]=[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}]=[\frac{n}{2^k}]-[\frac{n}{2^{k+1}}]$

所以 $\sum_{k=0}^{n}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]=\sum_{k=0}^{n}([\frac{n}{2^k}]-[\frac{n}{2^{k+1}}])=[\frac{n}{2^0}]-[\frac{n}{2^{n+1}}]=n$

分析：同余性质

解：因为 $2^3\equiv1(mod7)$

所以 $2^{3k}\equiv1(mod7)$

易知 $2^{3k+1}\equiv2(mod7)$，$2^{3k+2}\equiv4(mod7)$

总之 $2^n\neq-1(mod7)$，所以原命题成立

分析：降幂，和差化积

解：$1+\cos2x+1+\cos4x+2\cos^2 3x=2$

和差化积得：$2\cos x\cos3x+2\cos^2 3x=0$

再次和差化积 $\cos x\cos2x\cos3x=0$

所以 $\cos x=0$ 或 $\cos2x=0$ 或 $\cos3x=0$

$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ 或 $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}(k\in\mathbb{Z})$

分析：分母有理化

解： 易知 $1+2x\geqslant 0, 1\neq\sqrt{1+2x}$，所以 $x\geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $x\neq 0$

$$\mathrm{LHS}=\left(\frac{2x}{\sqrt{1+2x}-1}\right)^2<2x+9$$

$$\left[\frac{2x(\sqrt{1+2x}+1)}{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}\right]^2<2x+9$$

$$\left[\frac{2x(\sqrt{1+2x}+1)}{2x}\right]^2<2x+9$$

所以 $(\sqrt{1+2x}+1)^2<2x+9$

化简得：$2\sqrt{1+2x}<7, x<\frac{45}{8}$

综上 $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{45}{8}\right)$

十一、厦门大学 2024 年强基计划试题答案

1、数学笔试及答案试题（部分）

1.变换 $w=\frac{1}{z}$ 将复平面（$z=x+yi$）上的直线 x=1 变换为 W 平面（$w=p+qi$）上的曲线 C，求曲线 C 围成的面积。

2.在（-1,1）上任取 2 个数，求两数之和小于 0.4 的概率。

3.若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接等腰三角形 ABC 的底边平行于 x 轴，求△ABC 的面积最大值。

4.已知 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{4}, g(x)=\frac{1}{x-8}$，求 f(x)=g(x)在[-4,20]上所有的根的和。

5.已知 m，n 为整数，若二元函数 f(m,n)满足

$4f(m,n)=f(m+1,n)+f(m-1,n)+f(m,n+1)+f(m,n-1)$，则称 f(m,n)为兔函数。

下列是兔函数的有：

(1) $f(m,n)=m^2-n^2$　(2) $f(m,n)=\begin{cases}(-1)^m, m=n\\ 0,\ m\neq n\end{cases}$　(3) $f(m,n)=\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)e^{nb}$，其中 $e^b+e^{-b}=4$

6. 已知正整数 a,b 互素。问 a^2+b^2 和 ab 是否互素。

1. $z=1+bi$ $\quad \omega=\frac{1}{1+bi}=\frac{1-bi}{1+b^2}$

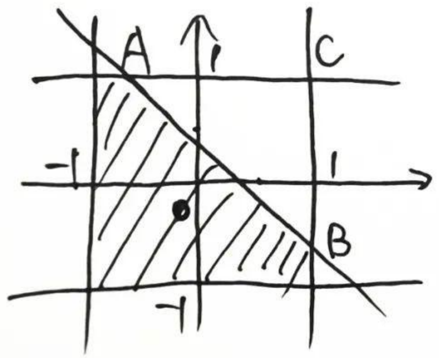
$\therefore p=\frac{1}{1+b^2} \quad q=\frac{-b}{1+b^2}$

$\therefore p^2+q^2=\frac{1}{1+b^2}=p$

$\therefore (p-\frac{1}{2})^2+q^2=\frac{1}{4}$. 围成面积为$\frac{\pi}{4}$

2. 两数设为 x. y.

$$\begin{cases} -1<x<1 \\ -1<y<1 \\ x+y<0.4 \end{cases}$$



$\therefore P=\frac{S_{阴}}{4}$

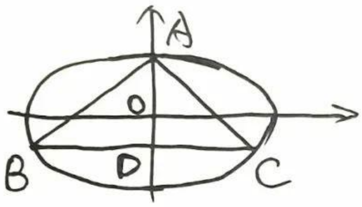
$=\frac{(4-S_{\triangle ABC})}{4}$

$=\frac{(4-\frac{1.6\times1.6}{2})}{4}$

$=1-0.32$

$=0.68$

3.



设 $AD=h+b$

$\because \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{h^2}{b^2}=1$

$\therefore x_C^2=a^2\left(1-\dfrac{h^2}{b^2}\right)$

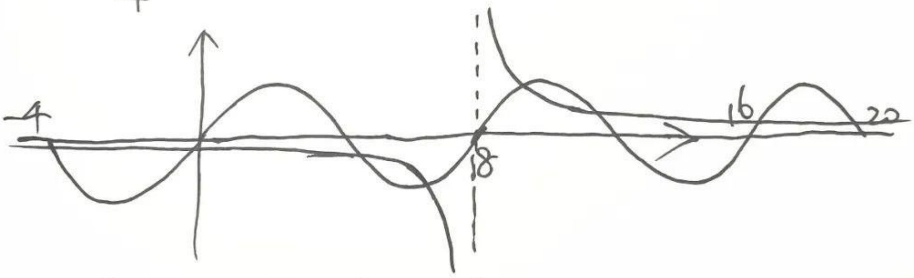
$$\because S_{ABC}=CD\times AD$$
$$=a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\cdot(h+b)$$
$$=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2-h^2)(b+h)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b-h)(b+h)^3}$$

因 $(3b-3h)(b+h)^3\le\left[\frac{1}{4}(3b-3h+3b+3h)\right]^4$

$$\therefore (b-h)(b+h)^3\le\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{2}b\right)^4=\frac{27}{16}b^4$$

$$\therefore S_{ABC}\le\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{27}{16}b^4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$

4. $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$ ∵ $f(x)$ 关于 $(8,0)$ 对称



∴ $f(x)=g(x)$ 共有 8 个解. 所有根的和为 64

5.
(1) $f(m+1,n)+f(m-1,n)$
$=(m+1)^2-n^2+(m-1)^2-n^2$
$=2(m^2+1-n^2)$
$f(m,n-1)+f(m,n+1)$
$=m^2-(n-1)^2+m^2-(n+1)^2$
$=2(m^2-n^2-1)$
∴ $f(m,n)=m^2-n^2$ 是息函数.

(2) 取 $m=n=2$ 可知 $f(2,2)=1$
$f(m+1,n)=f(m-1,n)=f(m,n-1)=f(m,n+1)=0$.
∴ $f(m,n)=\begin{cases}(-1)^m & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$ 不是息函数

(3) $f(m+1,n)+f(m-1,n)$

$=\sin\frac{m+1}{2}\pi\cdot e^{nb}+\sin\frac{m-1}{2}\pi\cdot e^{nb}$

$=0$

$f(m,n-1)+f(m,n+1)$

$=\sin\frac{m\pi}{2}\left(e^{(n-1)b}+e^{(n+1)b}\right)$

$=\sin\frac{m\pi}{2}e^{nb}\left(e^{-b}+e^{b}\right)$

$=4\sin\frac{m\pi}{2}e^{nb}=4f(m,n)$

$\therefore f(m,n)=\sin\frac{m\pi}{2}e^{nb}$ 是免函数

6. $(a,b)=1=(a+b,b)$

$(a^2+b^2,ab)=(a^2+b^2+2ab,ab)$

$=((a+b)^2,ab)=1$

7. $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=\sqrt{2}b-a$, $x_4=b-\sqrt{2}a$

$x_5=\sqrt{2}(b-\sqrt{2}a)-(\sqrt{2}b-a)=-a$

$x_6=-\sqrt{2}a-(b-\sqrt{2}a)=-b$

$x_7=-\sqrt{2}b+a$ $\quad x_8=\sqrt{2}a-b$

$x_9=\sqrt{2}(\sqrt{2}a-b)+\sqrt{2}b-a=a$

$x_{10}=\sqrt{2}a-(\sqrt{2}a-b)=b$

$\therefore T=8$, $S_8=0$

$2023=8\times252+7$

$\therefore x_{2023}=x_7=a-\sqrt{2}b$

$S_{2023}=S_7=b-\sqrt{2}a$

关于自主选拔在线

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、专项计划、少年班、研学实践、学科竞赛、综合素质评价、新高考选科、志愿填报、港澳升学、中外合作校、大学保研留学等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（**官方网址：www.zizzs.com**）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。