

试卷类型: A

2021 级高三模拟考试

数学试题

2024. 02

考生注意:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束, 将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

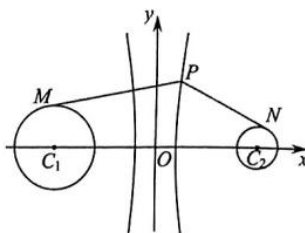
1. 已知集合 $A = \{x | 2x^2 - x - 1 \leq 0\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[-\frac{1}{2}, 1]$ B. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $[0, 1]$ D. $(0, 1]$
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 且 $a_1 + a_2 = 3$, 则 $a_5 + a_6 =$
A. 24 B. 48 C. 72 D. 96
3. 已知样本空间 $\Omega = \{a, b, c, d\}$ 含有等可能的样本点, 且事件 $A = \{a, b\}$, 事件 $B = \{b, c\}$, 则 $P(A\bar{B}) =$
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1
4. 已知 l, m 是两条不同的直线, α 为平面, $m \subset \alpha$, 下列说法中正确的是
A. 若 l 与 α 不平行, 则 l 与 m 一定是异面直线
B. 若 $l // \alpha$, 则 l 与 m 可能垂直
C. 若 $l \cap \alpha = A$, 且 $A \notin m$, 则 l 与 m 可能平行
D. 若 $l \cap \alpha = A$, 且 l 与 α 不垂直, 则 l 与 m 一定不垂直
5. 今年贺岁片, 《第二十条》、《热辣滚烫》、《飞驰人生 2》引爆了电影市场, 小明和他的同学一行四人决定去看这三部电影, 则恰有两人看同一部影片的选择共有
A. 9 种 B. 36 种 C. 38 种 D. 45 种

6. “ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ”是“ $\alpha^3 < \sin \alpha$ ”的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x) = 2^{\sin x} - 2^{\cos x}$, 则

- A. $f(\frac{\pi}{4} + x) = f(\frac{\pi}{4} - x)$
B. $f(x)$ 不是周期函数
C. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在极值
D. $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内有且只有一个零点

8. 过双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的右支上一点 P , 分别向 $\odot C_1: (x+4)^2 + y^2 = 3$ 和 $\odot C_2: (x-4)^2 + y^2 = 1$ 作切线, 切点分别为 M, N , 则 $(\overline{PM} + \overline{PN}) \cdot \overline{NM}$ 的最小值为



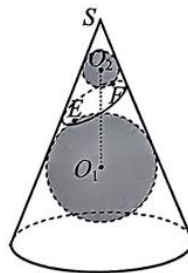
- A. 28 B. 29 C. 30 D. 32

二、选择题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得6分, 部分选对的得部分分, 有选错的得0分。

9. 下列命题正确的是
- A. 复数 $z = -2 - i$ 的虚部为 -1
B. 设 z 为复数, $(1-i)z = 1+i$, 则 $|\bar{z}| = 2$
C. 若复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 为纯虚数, 则 $a = 0, b \neq 0$
D. 复数 $2 - i$ 在复平面内对应的点在第二象限
10. 从标有 $1, 2, 3, \dots, 8$ 的8张卡片中有放回地抽取两次, 每次抽取一张, 依次得到数字 a, b , 记点 $A(a, b), B(1, -1), O(0, 0)$, 则
- A. $\angle AOB$ 是锐角的概率为 $\frac{7}{16}$ B. $\angle ABO$ 是直角的概率为 $\frac{1}{32}$
C. $\triangle AOB$ 是锐角三角形的概率为 $\frac{7}{64}$ D. $\triangle AOB$ 的面积不大于5的概率为 $\frac{43}{64}$

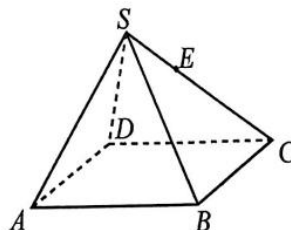
11. 如图是数学家 Germinal Dandelin 用来证明一个平面截圆锥侧面得到的截面曲线是椭圆的模型（称为“Dandelin 双球”）。在圆锥内放两个大小不同的小球，使得它们分别与圆锥的侧面、截面相切，截面分别与球 O_1 ，球 O_2 切于点 E ， F （ E ， F 是截面椭圆 C 的焦点）。设图中球 O_1 ，球 O_2 的半径分别为 4 和 1，球心距 $|O_1O_2| = \sqrt{34}$ ，则

- A. 椭圆 C 的中心不在直线 O_1O_2 上
 B. $|EF| = 4$
 C. 直线 O_1O_2 与椭圆 C 所在平面所成的角的正弦值为 $\frac{5\sqrt{34}}{34}$
 D. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{3}{5}$



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 有一组按从小到大顺序排列的数据：3，5，7，8，9，10，则这组数据的 40% 分位数为_____。
13. 设 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 满足：对任意 $x_1 \in \mathbf{R}$ ，均存在 $x_2 \in \mathbf{R}$ ，使得 $f(x_1) = f(x_2) - 2x_2$ ，则实数 a 的取值范围是_____。
14. 已知正四棱锥 $S - ABCD$ 的所有棱长都为 2，点 E 在侧棱 SC 上，过点 E 且垂直于 SC 的平面截该棱锥，得到截面多边形 H ，则 H 的边数至多为_____， H 的面积的最大值为_____。



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\sqrt{2}a - 2b\sin A = 0$ 且 $a = 5, c = 4\sqrt{2}$.

- (1) 求角 B 及边 b 的大小;
- (2) 求 $\sin(2C + B)$ 的值.

16. (15 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 a_n, S_n, a_n^2 为等差数列.

- (1) 求 a_1 及 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记集合 $\{a_n \mid a_n + \frac{4}{a_n} \leq 2k, k \in \mathbb{N}_+\}$ 的元素个数为 b_k , 求数列 $\{b_k\}$ 的前 50 项和.

17. (15 分)

随着科技的不断发展，人工智能技术的应用领域也将会更加广泛，它将会成为改变人类社会发展的力量。某科技公司发明了一套人机交互软件，它会从数据库中检索最贴切的结果进行应答。在该交互软件进行测试时，如果输入的问题没有语法错误，则软件正确应答的概率为 80%；若出现语法错误，则软件正确应答的概率为 30%。假设每次输入的问题出现语法错误的概率为 10%。

- (1) 求一个问题能被软件正确应答的概率；
- (2) 在某次测试中，输入了 $n(n \geq 6)$ 个问题，每个问题能否被软件正确应答相互独立，记软件正确应答的个数为 X , $X = k(k = 0, 1, \dots, n)$ 的概率记为 $P(X = k)$, 则 n 为何值时， $P(X = 6)$ 的值最大？

18. (17分)

已知函数 $f(x) = 3\ln x + ax^2 - 4x (a > 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

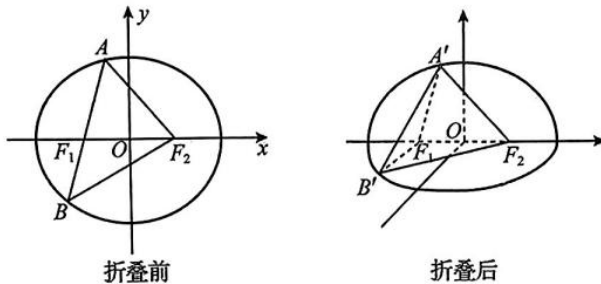
(2) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 若方程 $f(x) = b$ 有三个不相等的实数根 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$,

证明: $x_3 - x_1 < 4$.

19. (17分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$,

经过点 F_1 且倾斜角为 $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点 (其中点 A 在 x 轴上方), 且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8. 将平面 xoy 沿 x 轴向上折叠, 使二面角 $A-F_1F_2-B$ 为直二面角, 如图所示, 折叠后 A, B 在新图形中对应点记为 A', B' .



(1) 当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时,

① 求证: $A'O \perp B'F_2$;

② 求平面 $A'F_1F_2$ 和平面 $A'B'F_2$ 所成角的余弦值;

(2) 是否存在 $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 使得折叠后 $\triangle A'B'F_2$ 的周长为 $\frac{15}{2}$? 若存在, 求 $\tan \theta$

的值; 若不存在, 请说明理由.

日照市 2021 级高三模拟考试

数学答案

2024.02

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1-5 DBABB 6-8DDC

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9.AC 10.ACD 11.ACD

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12.7 13. $(-\infty, 1]$ 14. 5, $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 解: (1) 依题意, $\sqrt{2}a - 2b\sin A = 0$,

由正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A - 2\sin B\sin A = 0$,

由于锐角三角形中 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $\sin A > 0$, 所以 $\sqrt{2} - 2\sin B = 0$, $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

而 B 是锐角, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$3 分

由余弦定理得 $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{25 - 32 - 2 \times 5 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{17}$6 分

(2) 由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{25 + 17 - 32}{2 \times 5 \times \sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$,8 分

而 C 是锐角, 所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$,

所以 $\sin(2C + B) = \sin\left(2C + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2C + \cos 2C)$ 10 分

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin C \cos C + 2\cos^2 C - 1)$

$= \sqrt{2} \sin C \cos C + \sqrt{2} \cos^2 C - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{2} \times \frac{4}{\sqrt{17}} \times \frac{1}{\sqrt{17}} + \sqrt{2} \times \frac{1}{17} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{7\sqrt{2}}{34}$13 分

16. (15 分) 解: (1) 因为 a_n, S_n, a_n^2 为等差数列, 所以 $2S_n = a_n + a_n^2$, 且 $a_n > 0$

当 $n=1$ 时, $2S_1 = 2a_1 = a_1 + a_1^2$, 可得 $a_1 = 1$;2 分

当 $n \geq 2$ 时,

$$2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n = a_n + a_n^2 - a_{n-1} - a_{n-1}^2, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\text{则 } a_n + a_{n-1} = a_n^2 - a_{n-1}^2 = (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1});$$

$$\text{由 } a_n + a_{n-1} > 0, \text{ 故 } a_n - a_{n-1} = 1, \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 故 $a_n = n$. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

$$(2) \text{ 原式等价于 } \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \leq k \Rightarrow \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \leq k \Rightarrow \frac{1}{2} \left(n + \frac{4}{n} \right) \leq k,$$

$$\text{因为 } \frac{1}{2} \left(n + \frac{4}{n} \right) \geq 2, \text{ 当且仅当 } n = 2 \text{ 时成立, 所以 } b_1 = 0, b_2 = 1, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{当 } k \geq 3, \text{ 因为 } \frac{2k-1}{2} + \frac{2}{2k-1} = k - \frac{1}{2} + \frac{2}{2k-1} \leq k, \frac{2k}{2} + \frac{2}{2k} = k + \frac{1}{k} > k,$$

所以能使 $\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \leq k$ 成立的 n 的最大值为 $2k-1$,

$$\text{所以 } b_k = 2k-1 (k \geq 3), \dots\dots\dots 13 \text{分}$$

$$\text{所以 } \{b_k\} \text{ 的前 } 50 \text{ 项和为 } 0+1+5+7+\dots+99 = 0+1+\frac{(5+99) \times 48}{2} = 2497. \dots\dots\dots 15 \text{分}$$

17. (15分) 解: (1) 记“输入的问题没有语法错误”为事件 A, “一次正确应答”为事件 B,

$$\text{由题意 } P(\bar{A}) = 0.1, P(B|A) = 0.8, P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.3, \text{ 则 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.9, \dots\dots 3 \text{分}$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.9 \times 0.8 + 0.1 \times 0.3 = 0.75. \dots\dots 6 \text{分}$$

$$(2) \text{ 依题意, } X \sim B\left(n, \frac{3}{4}\right),$$

$$P(X=6) = C_n^6 \left(\frac{3}{4}\right)^6 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-6}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{设 } f(n) = C_n^6 \left(\frac{3}{4}\right)^6 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-6} (n \geq 6),$$

$$\text{则 } \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{C_{n+1}^6 \left(\frac{3}{4}\right)^6 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-5}}{C_n^6 \left(\frac{3}{4}\right)^6 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-6}} = \frac{n+1}{4(n-5)}, \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

$$\text{令 } \frac{n+1}{4(n-5)} > 1 \text{ 解得: } n < 7, \text{ 所以当 } n \leq 6 \text{ 时, } f(n+1) > f(n),$$

$$\text{令 } \frac{n+1}{4(n-5)} < 1 \text{ 解得: } n > 7, \text{ 所以当 } n \geq 8 \text{ 时, } f(n+1) < f(n),$$

当 $n=7$ 时, $f(7)=f(8)$,
所以 $n=7$ 或 $n=8$ 时, $f(n)$ 最大, 故使 $P(X=6)$ 最大的 n 的值为 7 或 8. ……15 分

18. (17 分) 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为

$$(0, +\infty), f'(x) = \frac{3}{x} + 2ax - 4 = \frac{2ax^2 - 4x + 3}{x} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

又 $a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $2ax^2 - 4x + 3 = 0, \Delta = 16 - 24a$.

当 $\Delta \leq 0$, 即 $a \geq \frac{2}{3}$ 时, $2ax^2 - 4x + 3 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立, $f'(x) \geq 0$. ……4 分

当 $\Delta > 0$, 即 $0 < a < \frac{2}{3}$ 时, 方程 $2ax^2 - 4x + 3 = 0$ 有两根, 可求得:

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - 6a}}{2a}, x_2 = \frac{2 + \sqrt{4 - 6a}}{2a},$$

因为 $x_1 + x_2 = \frac{4}{2a} > 0, x_1 x_2 = \frac{3}{2a} > 0$, 所以 $x_1 > x_2 > 0$.

当 $x \in (0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数. ……7 分

综上: 当 $a \geq \frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $0 < a < \frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2 - \sqrt{4 - 6a}}{2a}\right)$ 和 $\left(\frac{2 + \sqrt{4 - 6a}}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\frac{2 - \sqrt{4 - 6a}}{2a}, \frac{2 + \sqrt{4 - 6a}}{2a}\right)$ 上单调递减. ……8 分

(2) 证明: 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递

减, 又方程 $f(x) = b$ 有三个不相等的实数根,

可得 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3$, 下证 $x_3 - x_1 < 4$,

由 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = b$,

构造函数 $h(x) = f(x) - f(2-x) (0 < x < 1)$,

$h'(x) = f'(x) + f'(2-x) = \frac{6(x-1)^2}{x(2-x)}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

$\therefore h(x) < h(1) = 0$, 即 $f(x) - f(2-x) < 0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立,
 又 $x_1 \in (0,1)$, 则有: $f(x_1) - f(2-x_1) < 0, \therefore f(x_2) = f(x_1) < f(2-x_1)$,
 又 $\because x_2 \in (1,3), 2-x_1 \in (1,2)$, 且 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减,
 $\therefore x_2 > 2-x_1$, 即 $x_1 + x_2 > 2$12分
 构造函数 $\varphi(x) = f(x) - f(6-x) (1 < x < 3)$,
 $\varphi'(x) = f'(x) + f'(6-x) = \frac{2(x-3)^2}{x(6-x)}$, 当 $x \in (1,3)$ 时 $\varphi'(x) > 0, \varphi(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增.
 $\therefore \varphi(x) < \varphi(3) = 0$, 即 $f(x) - f(6-x) < 0$ 在 $(1,3)$ 上恒成立.
 又 $\because x_2 \in (1,3)$, 则 $f(x_2) - f(6-x_2) < 0$. 即 $f(x_3) = f(x_2) < f(6-x_2)$,
 由 $x_2 \in (1,3), x_3 \in (3, +\infty)$, 则 $6-x_2 \in (3,5)$.
 $\because f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore x_3 < 6-x_2, x_3 + x_2 < 6$16分
 又 $x_1 + x_2 > 2$, 则可证得: $x_3 - x_1 < 4$17分
 (本题也可构造函数 $h(x) = f(x) - f(4+x) (0 < x < 1)$ 进行证明.)

19. (17分) 解: (1) ①由椭圆的定义知: $|AF_1| + |AF_2| = 2a, |BF_1| + |BF_2| = 2a$,

所以 $\triangle ABF_2$ 的周长 $L = 4a = 8$, 所以 $a = 2$, 椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

所以 $c = 1, b^2 = a^2 - c^2 = 3$2分

由题意, 椭圆的焦点在 x 轴上,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$3分

由直线 $l: y - 0 = \sqrt{3}(x + 1)$ 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

联立求得 $A(0, \sqrt{3}), B(-\frac{8}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5})$, (因为点 A 在 x 轴上方)4分

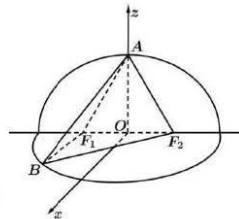
故 $AO \perp F_1F_2$, 即 $A'O \perp F_1F_2$,

平面 $A'F_1F_2 \perp$ 平面 $B'F_1F_2$, 平面 $A'F_1F_2 \cap$ 平面

$B'F_1F_2 = F_1F_2$,
 所以 $A'O \perp$ 平面 $B'F_1F_2, B'F_2 \subset$ 平面 $B'F_1F_2$,

所以 $A'O \perp B'F_2$6分

② O 为坐标原点, 折叠后原 y 轴负半轴, 原 x 轴, 原 y 轴正半轴所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $F_1(0, -1, 0)$, $A'(0, 0, \sqrt{3})$, $B'(\frac{3}{5}\sqrt{3}, -\frac{8}{5}, 0)$, $F_2(0, 1, 0)$, $\overline{A'F_2} = (0, 1, -\sqrt{3})$,
 $\overline{B'F_2} = (-\frac{3}{5}\sqrt{3}, \frac{13}{5}, 0)$.

平面 $A'F_1F_2$ 的法向量 $\overline{n_1} = (1, 0, 0)$,8分

设平面 $A'B'F_2$ 的法向量 $\overline{n_2} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overline{n_2} \cdot \overline{F_2A'} = y - \sqrt{3}z = 0 \\ \overline{n_2} \cdot \overline{B'F_2} = -\frac{3}{5}\sqrt{3}x + \frac{13}{5}y = 0 \end{cases}$

取 $y = \sqrt{3}$, 得 $\overline{n_2} = (\frac{13}{3}, \sqrt{3}, 1)$ 是平面 $A'B'F_2$ 的一个法向量,10分

记平面 $A'F_1F_2$ 和平面 $A'B'F_2$ 所成角 φ ,

则 $\cos \varphi = |\cos \langle \overline{n_1}, \overline{n_2} \rangle| = \frac{|\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}|}{|\overline{n_1}| |\overline{n_2}|} = \frac{13\sqrt{205}}{205}$

故平面 $A'F_1F_2$ 和平面 $A'B'F_2$ 所成角的余弦值为 $\frac{13\sqrt{205}}{205}$ 11分

(2) 设折叠前 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 折叠后 A, B 在新图形中对应点记为 A', B' ,
 $A'(x_1, y_1, 0)$, $B'(x_2, 0, -y_2)$;

将直线 l 方程与椭圆方程联立 $\begin{cases} my = x + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$,

$y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$,12分

在折叠后的图形中建立如图所示的空间直角坐标系 (原 x 轴仍然为 x 轴, 原 y 轴正半轴为 y 轴, 原 y 轴负半轴为 z 轴);

$|A'B'| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + y_2^2}$, $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,

由 $|A'F_2| + |B'F_2| + |A'B'| = \frac{15}{2}$, $|AF_2| + |BF_2| + |AB| = 8$, 故 $|AB| - |A'B'| = \frac{1}{2}$,

所以 $|AB| - |A'B'| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + y_2^2} = \frac{1}{2}$, (i)

又 $\frac{-2y_1 y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + y_2^2}} = \frac{1}{2}$.

所以 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + y_2^2} = -4y_1y_2$, (ii)

由 (i) (ii) 可得 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{1}{4} - 2y_1y_2$,

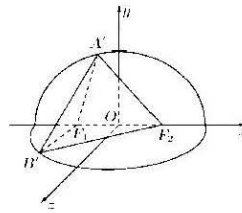
因为 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (1+m^2)(y_1 - y_2)^2 = \left(\frac{1}{4} - 2y_1y_2\right)^2$,

所以 $(1+m^2) \left[\left(\frac{6m}{3m^2+4}\right)^2 + \frac{36}{3m^2+4} \right] = \left(\frac{1}{4} + \frac{18}{3m^2+4}\right)^2$,15分

即 $144 \left(\frac{1+m^2}{3m^2+4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{18}{3m^2+4}\right)^2$, 所以 $\frac{12+12m^2}{3m^2+4} = \frac{1}{4} + \frac{18}{3m^2+4}$, 解得 $m^2 = \frac{28}{45}$,

因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以

$\tan \theta = \frac{1}{m} = \frac{3\sqrt{35}}{14}$,17分



关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索