浙江省新阵地教育联盟2024届第三次联考

数学参考答案

一、**单项选择题**：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	C	D	A	A	C	B

二、**多项选择题**：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9	10	11
ACD	AC	BCD

三、**填空题**：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12．18　13．$\sqrt{2}+\frac{1}{2}$　　14．$\frac{2023}{3}$

四、**解答题**：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（本题共13分）

解：（1）补全2×2列联表如下：

性别	课间进行体育活动情况		合计
	不经常	经常	
男	80	40	120
女	100	20	120
合计	180	60	240

………………2分

提出零假设H_0：学生课间经常进行体育活动与性别相互独立，即课间是否经常进行体育活动与性别无关.

依题意，$\chi^2=\dfrac{240\times(80\times20-40\times100)^2}{120\times120\times180\times60}=\dfrac{80}{9}\approx8.888>7.879=x_{0.005}$，　………………4分

根据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验，推断H_0不成立，即有99.5%的把握认为学生课间经常进行体育活动与性别有关联　　.　………………6分

（2）由题意得，学生课间经常进行体育活动的频率为 $\frac{60}{240}=\frac{1}{4}$，所以在全校学生中随机抽取 1 人，其课间经常进行体育活动的概率为 $\frac{1}{4}$.

而随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，则由题意得 $X\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$ ………………8 分

所以 $P(X=k)=C_3^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$.

$P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^0\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$，$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$，

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$，$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$，

X 的分布列如下： ………………11 分

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. ………………13 分

16.（本题共 15 分）

解：

（1）由 $2\sin C=3\sin(A-B)$ 得 $2\sin(A+B)=3\sin(A-B)$ ………………2 分

则 $2\sin A\cos B+2\cos A\sin B=3\sin A\cos B-3\cos A\sin B$

得 $\sin A\cos B=5\cos A\sin B\Rightarrow\tan A=5\tan B$ ………………6 分

（2）$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{5}{12}c^2$ ………………8 分

所以 $\sin A\sin B\sin C=\frac{5}{6}\sin^2 C$，则 $\sin A\sin B=\frac{5}{6}\sin C=\frac{5}{6}\sin(A+B)$，

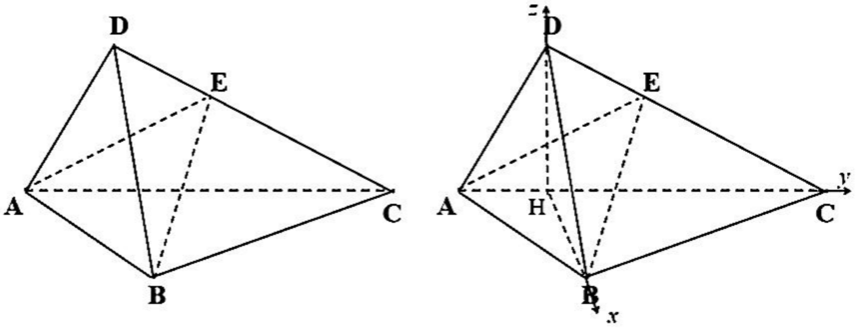
$\sin A\sin B=\frac{5}{6}\sin A\cos B+\frac{5}{6}\cos A\sin B$

从而 $\tan A\tan B=\frac{5}{6}(\tan A+\tan B)$ ………………10 分

又 $\tan A=5\tan B$， 从而 $\tan B=1$ ………………12 分

所以 $\tan C=-\tan(A+B)=\frac{3}{2}$ ………………15 分；

17.（本题共 15 分）



解：

（1）过 D 作 $DH\perp AC$，垂足为 H，由 $AC=3$，$DC=2\sqrt{2}$，$\angle DCA=45^\circ$，计算得到 $DH=CH=2$，

$\because CB\perp AB$，得 $AB=\sqrt{3}$ ，$\therefore AC\cdot BH=AB\cdot BC$，所以 $BH=\sqrt{2}$； ……………3 分

在 ΔBDH 中，$BH^2+DH^2=DB^2$，所以 $DH\perp BH$

又 $DH\perp AC$，$AC\cap BH=H$，AC，BH$\subset$平面 ABC，

所以 $DH\perp$平面 ABC，$DH\subset$平面 ADC，平面 $ADC\perp$平面 ABC； ………………6 分

（2）如图以 H 为原点，HB 为 x 轴，HC 为 y 轴，HD 为 z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$；

得 $A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,2)$

设 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DC}$，$0\le\lambda\le1$，$\therefore\overrightarrow{DE}=(0,2\lambda,-2\lambda)$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DE}=(0,1,2)+(0,2\lambda,-2\lambda)=(0,1+2\lambda,2-2\lambda)$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},1,0)$ …………8 分

设平面 ABE 的一个法向量为 $\overline{m}=(x,\ y,\ z)$，则 $\begin{cases}\overline{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overline{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}x+y=0\\ (1+2\lambda)y+(2-2\lambda)z=0\end{cases}$

$\overline{m}=(1,-\sqrt{2},\dfrac{1+2\lambda}{\sqrt{2}(1-\lambda)})$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},2,0)$ ………………10 分

设直线 BC 与平面 EAB 所成角为 θ，$\sin\theta=\left|\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{m}}{|\overline{BC}|\cdot|\overline{m}|}\right|=\dfrac{\left|-3\sqrt{2}\right|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3+(\dfrac{1+2\lambda}{\sqrt{2}(1-\lambda)})^2}}=\dfrac{\sqrt{33}}{11}$

$\therefore(\dfrac{1+2\lambda}{\sqrt{2}(1-\lambda)})^2=8,\dfrac{1+2\lambda}{\sqrt{2}(1-\lambda)}=2\sqrt{2},\because 0\le\lambda\le1,\therefore\lambda=\dfrac{1}{2}$， ………………13 分

所以 $DE=\sqrt{2}$； ………………15 分

18．（本题共 17 分）

解：

（1）由已知 $2a=4$，$a=2$，又因为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow c=1$，$b^2=a^2-c^2=3$，所以 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ………………2 分

$F(1,0)$，$C(-2,0)$，设 $A(x_1，y_1)$，假设 $AC\perp AF$，即 $AC\perp AF$，由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=0$

得 ${x_1}^2+{y_1}^2+x_1-2=0$① ………………4 分

又 $\dfrac{{x_1}^2}{4}+\dfrac{{y_1}^2}{3}=1$②，由①②消去 y_1 得到

${x_1}^2+4x_1+4=0\Rightarrow x_1=-2$，与题设矛盾，所以 AC 与 AB 不可能垂直. ………………6 分

（2）设 AB 方程：$x=ty+1$，由 $\begin{cases}x=ty+1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$y_1+y_2=\dfrac{-6t}{3t^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$； ………………8 分

$|AB|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}\cdot\sqrt{1+t^2}=\dfrac{12\sqrt{1+t^2}}{3t^2+4}\sqrt{1+t^2}=\dfrac{12(1+t^2)}{3t^2+4}$ ………………10 分

$|AC|^2+|BC|^2=(x_1+2)^2+{y_1}^2+(x_2+2)^2+{y_2}^2=(ty_1+3)^2+{y_1}^2+(ty_2+3)^2+{y_2}^2$

$=(t^2+1)({y_1}^2+{y_2}^2)+6t(y_1+y_2)+18=(t^2+1)(y_1+y_2)^2-2(t^2+1)y_1y_2+6t(y_1+y_2)+18$

$=\dfrac{-18t^4+18t^2+72}{(3t^2+4)^2}+18$

$|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2=\dfrac{-18t^4+18t^2+72}{(3t^2+4)^2}+18+[\dfrac{12(1+t^2)}{3t^2+4}]^2=\dfrac{126t^4+306t^2+216}{(3t^2+4)^2}+18$

$=\dfrac{18(7t^4+17t^2+12)}{(3t^2+4)^2}+18$ ………………12 分

设 $m=3t^2+4,m\ge 4,$ 则原式 $=2\dfrac{7m^2-5m+16}{m^2}+18=2[16(\dfrac{1}{m})^2-5\dfrac{1}{m}+7]+18$

$=2[16(\dfrac{1}{m}-\dfrac{5}{32})^2+\dfrac{423}{64}]+18\ge\dfrac{423}{32}+18=\dfrac{999}{32}$

即当 $m=\dfrac{32}{5}$，即 $t^2=\dfrac{4}{5}$，$t=\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$ 时 ………………15 分

$|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2$ 的最小值为 $\dfrac{999}{32}$； ………………17 分

19.（本题共 17 分）

解：

（1）$f'(x)=-\sin x+\dfrac{\lambda}{1+x}$,则 $f'(0)=\lambda=1$，

$\therefore f(x)=\cos x+\ln(1+x)$ ………………4 分

（2）令 $h(x)=f(x)-ax-1=\cos x+\ln(1+x)-ax-1$，$x>-1$.由条件知 $h(x)\le 0$ 恒成立，

因为 $h(0)=0$，又 $h(x)$ 的图像在定义域上是连续不间断的，所以 $x=0$ 是 $h(x)$ 的一个极大值点，则 $h'(0)=0$.又 $h'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{1+x}-a$，所以 $h'(0)=1-a=0$，得 $a=1$.………6 分

下证当 $a=1$ 时，$h(x)\le 0$ 对任意 $x\in(-1,+\infty)$ 恒成立

令 $\varphi(x)=\ln(1+x)-x$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore \varphi(x)\le\varphi(0)=0$；即 $\ln(1+x)-x\le 0$,而 $\cos x-1\le 0$，

所以，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$h(x)=(\cos x-1)+[\ln(1+x)-x]\le 0$.

综上，若 $f(x)\le ax+1$ 恒成立，则 $a=1$. ………………10 分

（3）由（2）可知 $f(x)\le x+1$，$\therefore f(\sin\dfrac{1}{k}-1)\le\sin\dfrac{1}{k}$.

$$\therefore \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\sin\frac{1}{k}-1\right)=f(\sin\frac{1}{n+1}-1)+f(\sin\frac{1}{n+2}-1)+\cdots+f(\sin\frac{1}{2n}-1)$$
$$\le\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}$$

………………12 分

先证 $\sin x<x,x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

令 $t(x)=\sin x-x$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$t'(x)=\cos x-1<0$，

则 $t(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，$t(x)<t(0)=0$，即 $\sin x<x,x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

所以 $\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$

再证 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\dfrac{n+1}{n}$，由 $\ln x<x-1,0<x<1$（证明可省略），

令 $x=\dfrac{n}{n+1}$ 即得 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\dfrac{n+1}{n}$. ………………14 分

又 $\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$，得 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)$，……， $\dfrac{1}{n+n}<\ln(2n)-\ln(2n-1)$

所以 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}<\ln(2n)-\ln n=\ln 2$，

综上，$\sum\limits_{k=n+1}^{2n} f\left(\sin\dfrac{1}{k}-1\right)\le\ln 2$ ………………17 分